

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL

CONTRIBUTIONS À L'ANALYSE DE FIGURES DISCRÈTES  
EN DIMENSION QUELCONQUE

THÈSE  
PRÉSENTÉE  
COMME EXIGENCE PARTIELLE  
DU DOCTORAT EN MATHÉMATIQUES

PAR  
ANNIE LACASSE

SEPTEMBRE 2008

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL  
Service des bibliothèques

Avertissement

La diffusion de cette thèse se fait dans le respect des droits de son auteur, qui a signé le formulaire *Autorisation de reproduire et de diffuser un travail de recherche de cycles supérieurs* (SDU-522 – Rév.01-2006). Cette autorisation stipule que «conformément à l'article 11 du Règlement no 8 des études de cycles supérieurs, [l'auteur] concède à l'Université du Québec à Montréal une licence non exclusive d'utilisation et de publication de la totalité ou d'une partie importante de [son] travail de recherche pour des fins pédagogiques et non commerciales. Plus précisément, [l'auteur] autorise l'Université du Québec à Montréal à reproduire, diffuser, prêter, distribuer ou vendre des copies de [son] travail de recherche à des fins non commerciales sur quelque support que ce soit, y compris l'Internet. Cette licence et cette autorisation n'entraînent pas une renonciation de [la] part [de l'auteur] à [ses] droits moraux ni à [ses] droits de propriété intellectuelle. Sauf entente contraire, [l'auteur] conserve la liberté de diffuser et de commercialiser ou non ce travail dont [il] possède un exemplaire.»

## REMERCIEMENTS

Beaucoup de chemin parcouru depuis le début de cette aventure d'apprentissages, de découvertes, de rencontres, d'exaltation mais aussi d'angoisses. Vous le savez, vous étiez tous et toutes présents à mes côtés au cours de ces dernières années qui m'amènent aujourd'hui ici, à vous présenter le fruit de mon travail. Tout ceci n'aurait pas été envisageable sans vous, sans votre expérience, votre savoir, vos conseils, vos idées, vos encouragements et votre soutien indéfectible. Je vous dois en effet une fière chandelle !

Si une page est aujourd'hui tournée, le livre n'est quant à lui pas achevé et je suis persuadée que vous m'accompagnerez encore longtemps à noircir ces nouvelles pages.

J'aimerais tout d'abord remercier mes deux co-directeurs :

Srecko Brlek pour avoir été en quelque sorte l'élément déclencheur. Il y a plusieurs années, tu m'as persuadée de me lancer dans cette aventure et à plusieurs reprises, tu m'as secouée les puces pour continuer. Tu fais partie de mon univers, dans à peu près toutes ses dimensions, et ce, depuis belle lurette. Je me suis en effet infiltrée en tant que copine d'Anouk et je m'y suis incrustée depuis... Tu as assuré les rôles de colocataire, propriétaire, directeur de thèse, ami, conseiller et j'en passe. Même dans la tempête, je savais pouvoir compter sur ce grand viking aux airs intouchables, pourtant d'une simplicité, d'un altruisme et d'une générosité remarquable. Merci pour tout.

Merci et chapeau au professeur *émérite* Gilbert Labelle, l'impressionnant mathématicien barbu de la treizième dimension, pour avoir cru en moi jusqu'à la fin, malgré mon pessimisme génétique. Merci pour ton imagination, ta disponibilité, la qualité de tes enseignements et pour ta façon de faire avancer la science dans le délire et la rigolade assurée. Je n'oublierai pas de si tôt nos scénarios insolites lors de nos rencontres hebdomadaires.

François Bergeron, Louise Laforest, Christophe Fiorio, membres de mon jury, merci d'avoir accepté de me subir avec tant de gentillesse.

Clément, mon amour, tu fais aussi partie de cette belle histoire, de laquelle tu es surgi, à mon plus grand bonheur. Qui aurait cru que j'allais craquer pour un *matheux*, Français et luna-tique de surcroît... Même si tu peux sembler vaquer dans des sphères de fiction par moments, tu as bien les deux pieds sur terre, merci de tes attentions, de ton calme, ton ouverture et ton esprit positif, je sais que ce n'est pas un mince défi que de vivre à mes côtés !

Si je suis parvenue à accoucher de cette thèse, c'est aussi beaucoup grâce à vous, ma famille, vous qui m'avez toujours procuré soutien, équilibre et amour, chacun à votre façon et je vous en suis fort reconnaissante : Claude, même retraité, tu es toujours comme un scout, toujours prêt à donner un coup de main à tes proches et moins proches, tout mon entourage t'a déjà adopté, difficile de résister à ta spontanéité. Il en va de même pour toi maman, il n'y a pas de mots pour exprimer ton immense générosité, la qualité de ta présence et l'importance que tu accordes à notre bonheur. Madeleine, ma grand-mère, est sans conteste le pilier de la famille et véritable force de la nature, malgré son *certain âge* comme elle se plaît à le dire depuis déjà longtemps ! Je m'estime privilégiée d'avoir grandi auprès d'une telle personne qui a traversé et croisé les générations, les étapes et les épreuves de la vie, avec une force d'adaptation extraordinaire, un dévouement et un courage sans égal, sans pour autant perdre son sens de l'humour, sa joie de vivre et sa jeunesse d'esprit. Jules, mon grand-papa chéri, mon compagnon de casse-tête, je te remercie pour tous ces merveilleux souvenirs, je serai toujours ta fidèle papouille, même avec mon nouveau titre de *docteur*, promis, mes pensées t'accompagnent. Stéphane, mon frère, qui semble parfois vivre sur la lune mais qui a heureusement sa bonne étoile nommée Cathy pour le ramener parmi nous ainsi que leur attachante progéniture, Camille et William, qui arrivent à me faire oublier tous mes soucis, vous faites partie de mes petits bonheurs. Merci d'être là. Ma soeur Karine, malgré l'océan qui nous sépare, tu restes ma plus fidèle confidente et sage conseillère dans tous les domaines de mon petit univers. Malgré nos antécédents *australopithèques*, nous avons toujours évité les dégâts majeurs. Je te remercie pour ton aide, ta présence et ta façon de me faire réagir qui est parfois nécessaire pour me faire avancer. Je remercie aussi Hamouda mon cher chameau. Sans oublier, ma belle-famille qui m'a toujours encouragée même de loin !

Mes 4 mousquetaires adorées, que ferais-je sans vous...

Anouk, ma malade imaginaire préférée, malgré l'éloignement et ton nouveau statut d'ontarienne, c'est comme si rien n'avait changé... C'est ainsi depuis que nous nous sommes *choisies* comme amies à l'Ecole Le Plateau, nous ne nous sommes plus lâchées, et ce, dans bien des domaines de la vie, dont *les math*. Nous avons fait du chemin ensemble et cela n'est pas terminé. Tu es sans aucun doute mon meilleur public, merci de ton amitié, ta complicité, ton écoute et rappelle toi, si rien ne va plus dans la grande communauté scientifique, tu pourras toujours compter sur moi pour ouvrir la *guenille volante*.

Catherine, ma Dubois, la petite abeille de la ruche qui n'arrête jamais... toujours le mot pour encourager et réconforter, maintenant que tu t'es mise à l'ère de l'internet, on pourra laisser tomber les maudites boîtes vocales. Merci pour toutes tes attentions, ta présence, ta fiabilité, tes histoires incroyables d'urgence – des faits vécus – qui m'ont détendue et amusée plus d'une fois. Et j'attends le prochain scandale !!!

Nadine, mon irremplaçable Tati, qui, malgré toute la bonne volonté du monde trouve mes choix cinématographiques POURRIS. Tu es ma référence critique avec ta rigueur et tes arguments bétons, tu ne me dis pas ce que je veux entendre et je l'apprécie. Tu es pour moi une très grande source de soutien et ton amitié m'est très précieuse. Merci également de me laisser partager des moments privilégiés avec ta petite famille, particulièrement Lou dont les sourires effacent tous mes pires cauchemars.

Marie-Eve, notre histoire a commencé avec des tours de *Big wheel* dans la ruelle et elle dure toujours, encore pour longtemps d'ailleurs, même si le genre de *tours* que nous faisons maintenant ensemble a évolué. Avec tes mille et un talents, j'ai toujours été choyée ; photos par-ci, sacoche par-là... Et que dire de nos mémorables soirées cinéma maison, des *two thumbs up* accompagnés d'un petit *soft drink* !

Mon coloc de bureau, et j'ai nommé nul autre que le grand M. X. En effet, nous tergiversons toujours sur la nature de notre camaraderie : ami ?, coloc de bureau ?, ami d'université ? Je ne saurais quel titre lui attribuer mais peu importe, il occupe une place non négligeable dans cette histoire. Ce vétéran du bureau aura su m'endurer durant toutes ces années de doctorat... Sans lui, j'aurais peut-être fini ma thèse plus vite, ou plutôt jamais, car les moments de

délirium entre ces 4 murs ont été pour moi tout simplement irremplaçables et indispensables à mon équilibre. Cet incroyable M. X a, par son dynamisme contagieux, contribué à me donner l'énergie nécessaire pour m'accrocher, car même en fin de thèse, il a maintenu un rythme de vie digne de la *croisière s'amuse*.

Il me faudrait citer une longue liste d'amis et parents qui m'ont épaulée dans mon parcours. Au risque d'en oublier, je tiens à saluer chaleureusement mon ami Baptiste, l'infatigable bout-en-train qui a préféré les frites belges à la poutine, quel sacrilège !!! Même si tu as déserté le bureau pour le pays de la bière, tu es resté présent, merci pour tous les moments que j'ai passés avec toi. Le grand Phil à la toison coupée, nouveau propriétaire d'un BBQ, j'apprécie toujours les moments passés en ta compagnie. L'as des mots croisés et le Larousse + Bescherrelle en personne, combien de fois me suis-je fait taper sur les doigts par le maître ? Geneviève, ou plutôt Agent secret Paquin, au service de ses amis, la plus dévouée, merci pour ta disponibilité et ton écoute. Liam, le pro du yoyo, merci pour tes encouragements.

Dominique, merci pour ta confiance et ton amitié, tu as le don de désamorcer mes paniques, ta compagnie et tes conseils me sont très précieux. François Bergeron, merci de m'avoir toujours encouragée, ta façon de dédramatiser et de m'aider à voir la vie plus simplement m'a sans conteste motivée à persévérer. Feroz, merci d'avoir été mon public à mes tout débuts, ainsi que de me faire pratiquer mon anglais en fin de soirée, même si tu penses que c'est un cas désespéré. Rebecca, fidèle amie du clan Lacasse, tu viens ensoleiller notre vie avec Simone, Margot, Eliot et le beau Porto, merci d'être là.

Toute ma considération à Lise, le pilier et rayon de soleil du Lacim, celle qui gère les problèmes d'un peu tout le monde du haut de ses 5 pieds, je te lève mon chapeau ! Sans toi, tout serait plus triste, j'ai eu cette chance de te côtoyer et j'espère pouvoir profiter encore longtemps de ta bonne humeur, ton écoute et ta gentillesse. Merci à Gisèle et André, pour leur aide et leur soutien technique, à Manon, qui administre tout cela d'une main de maître, toujours avec le sourire ainsi qu'à Jeanne, Rita et Marie-Claude.

Enfin, merci au CRSNG, à l'ISM, ainsi qu'à mes directeurs pour m'avoir permis de concrétiser et de réaliser mes projets, sans votre soutien, cela n'aurait pu devenir réalité.

## TABLE DES MATIÈRES

LISTE DES TABLEAUX . . . . .	vii
LISTE DES FIGURES . . . . .	viii
RÉSUMÉ . . . . .	ix
INTRODUCTION . . . . .	1
CHAPITRE I	
NOTIONS DE BASE SUR LES POLYOMINOS . . . . .	4
1.1 Généralités sur les mots . . . . .	5
1.2 Définitions préliminaires sur les polyominos . . . . .	7
1.3 Différentes représentations . . . . .	9
CHAPITRE II	
ALGORITHMES RELIÉS AU THÉORÈME DE GREEN DISCRET . . . . .	12
2.1 Théorème de Green . . . . .	13
2.2 Algorithmes incrémentaux . . . . .	15
2.3 Applications élémentaires et exemples . . . . .	17
2.4 Notion d'algorithme incrémental additif . . . . .	22
2.5 Autres exemples et applications . . . . .	29
2.5.1 Déterminer si un pixel donné est contenu dans un polyomino . . . . .	29
2.5.2 Opérations booléennes sur les polyominos . . . . .	30
2.5.3 Intersection entre un polyomino et un ensemble donné de pixels . . . . .	32
2.5.4 Calcul de longueur d'équerre . . . . .	33
2.5.5 Calcul de moments d'ordre supérieur . . . . .	34
2.5.6 Calcul des familles de projections . . . . .	36
2.6 Autres champs d'exploration . . . . .	38
2.6.1 Calcul de paramètres sur les partages d'entiers . . . . .	39
2.6.2 Calcul de projections obliques . . . . .	39
2.6.3 Calcul pour polyominos avec trous . . . . .	42
2.7 Remarques . . . . .	43

CHAPITRE III	
ENSEMBLES DISCRETS D'INERTIE MINIMALE . . . . .	47
3.1 Terminologie . . . . .	48
3.2 Moment d'inertie continu et discret . . . . .	50
3.3 Propriétés des ensembles discrets d'inertie minimale . . . . .	52
3.3.1 Forte-convexité des ensembles discrets d'inertie minimale . . . . .	53
3.3.2 Quasi-disques et ensembles discrets ronds . . . . .	56
3.4 Algorithme pour engendrer les ensembles discrets de rondeur maximale . . . . .	61
3.5 Remarques et quelques problèmes ouverts . . . . .	66
CHAPITRE IV	
PROPRIÉTÉS DE CONTOURS D'ENSEMBLES DISCRETS . . . . .	72
4.1 Valuation des chemins dans le réseau carré . . . . .	73
4.1.1 Algorithme du chauffeur de taxi de Manhattan . . . . .	74
4.1.2 Application aux chemins non croisants . . . . .	77
4.2 Autres réseaux réguliers . . . . .	83
4.3 Remarques . . . . .	90
CHAPITRE V	
OPÉRATIONS DE MÉLANGE SUR LES CHEMINS DISCRETS . . . . .	91
5.1 Mélanges dans le réseau carré . . . . .	92
5.1.1 Opérations de mélange et mélange parfait . . . . .	92
5.1.2 Opérateur et courbe dragon . . . . .	93
5.1.3 Comportements réguliers de paramètres géométriques . . . . .	96
5.2 Extension à des mélanges plus généraux . . . . .	100
5.2.1 Mélange de mots et chemins liés aux racines de l'unité . . . . .	101
5.2.2 Opérateur dragon généralisé . . . . .	102
5.2.3 Conditions pour un comportement régulier de paramètres . . . . .	108
5.2.4 Courbes limites généralisées du dragon . . . . .	114
5.3 Remarques . . . . .	115
CHAPITRE VI	
GÉNÉRALISATION AUX DIMENSIONS SUPÉRIEURES . . . . .	116
6.1 Théorème de Stokes . . . . .	116
6.2 Vers une discrétisation du théorème de Stokes . . . . .	122
6.3 Généralisation des $V$ , $H$ et $VH$ algorithmes . . . . .	143
6.4 Cas spéciaux . . . . .	148



CONCLUSION . . . . .	151
0.1 Preuve géométrique de $\iint_{\mathbf{P}} f(x, y) dx dy = \int_{\gamma} F(x, y)(xdy - ydx)$ . . . . .	153
0.2 Le résultat d'un programme Maple sur un polyomino . . . . .	154
0.3 Programmes Maple . . . . .	154
0.3.1 Calcul de la distance moyenne à l'origine d'un point d'un polyomino . . . .	155
0.3.2 Calcul de paramètres associés aux polyominos . . . . .	157
0.1 Preuve . . . . .	159
RÉFÉRENCES . . . . .	160

## LISTE DES TABLEAUX

2.1	Aire. . . . .	18
2.2	Centre de gravité. . . . .	19
2.3	Algorithmes de $\iint_{\mathbf{P}}(x^2 + y^2) dx dy$ dans le moment d'inertie. . . . .	20
2.4	$f(x, y) = \frac{1}{\pi} \exp(-x^2 - y^2)$ , $\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(-t^2) dt$ . . . . .	20
3.1	Animaux les plus ronds de taille $N \leq 40$ , à symétrie diédrale près. . . . .	69
3.2	Paramètres associés aux animaux ronds ( $N \leq 40$ ), à symétrie diédrale près. . . . .	71

## LISTE DES FIGURES

1.1	(a) Un polyomino (b) pas 4-connexe (c) pas simplement connexe. . . . .	7
1.2	$\mathbf{V} = (2, 4, 2, 4, 4, 5, 3)$ et $\mathbf{H} = (5, 7, 6, 5, 1)$ . . . . .	8
1.3	Un polyomino (a) $v$ -convexe ; (b) $h$ -convexe ; (c) $hv$ -convexe. . . . .	8
1.4	Point de départ : (a) arbitraire ; (b) canonique. . . . .	9
1.5	(a) Le mot $w = a\bar{b}abababb\bar{a}\bar{b}\bar{a}\bar{b}\bar{a}\bar{b}$ et (b) le mot de Lyndon $abababb\bar{a}\bar{b}\bar{a}\bar{b}\bar{a}\bar{b}$ . . . . .	10
1.6	Points extrémaux d'un polyomino : $B_g, B_d, D_b, D_h, H_d, H_g, G_h, G_b$ . . . . .	11
2.1	Quelques paramètres sur les polyominos. . . . .	12
2.2	Polyomino codé par le mot $w = aababab\bar{a}\bar{a}\bar{b}\bar{a}\bar{b}\bar{b}\bar{a}\bar{b}$ . . . . .	17
2.3	Distance d'un point à l'origine. . . . .	22
2.4	$\mathbf{P} = \mathbf{P}_1 \cup \mathbf{P}_2$ ayant des intérieurs disjoints. . . . .	24
2.5	(a) Domino vertical, (b) domino horizontal, (c) un pixel $\text{Pix}_{x,y}$ . . . . .	25
2.6	(a) $\text{Pix}_{2,2}$ appartient au polyomino (b) $\text{Pix}_{5,2}$ n'appartient pas au polyomino. . . . .	30
2.7	Paires assorties. . . . .	31
2.8	Il y a 21 pixels appartenant à $\mathbf{P}$ , se trouvant au nord-est de $(\alpha, \beta)$ . . . . .	33
2.9	Il y a 11 pixels appartenant à $\mathbf{P}$ se trouvant dans $\text{equerre}_{\alpha,\beta}$ . . . . .	34
2.10	Famille de projections verticales. . . . .	38
2.11	Partage codé par $w = aaaaaaaaaa\bar{b}\bar{a}\bar{b}\bar{a}\bar{b}\bar{a}\bar{b}\bar{a}\bar{b}\bar{a}\bar{b}\bar{a}\bar{b}\bar{b}\bar{b}\bar{b}\bar{b}\bar{b}$ . . . . .	39
2.12	Projection oblique d'un polyomino. . . . .	40

2.13	$\text{Diag}_2 = 3$ . . . . .	41
2.14	Un polyomino avec trous. . . . .	42
2.15	Polyominos d'aire donnée classifiés selon l'ordre décroissant de rondeurs. . . .	46
3.1	(a) Un ensemble discret (b) un polyomino typique et (c) son animal correspondant.	48
3.2	Un polyomino (a) $v$ -convexe (b) $h$ -convexe (c) $hv$ -convexe (d) fortement-convexe.	49
3.3	(a) Cas 1 et (b) Cas 2 du Lemme 6. . . . .	54
3.4	Élimination des trous . . . . .	55
3.5	Fortement-convexe $\not\Rightarrow$ animal 4-connexe. . . . .	55
3.6	(a) Un disque (discret) (b) un quasi-disque (discret). . . . .	56
3.7	Chemins possibles lorsque $u', v' \notin A$ et $u', v'$ sont sur la circonférence. . . . .	58
3.8	Les disques $\Gamma_{a_0}$ et $C_{a_0}$ (en gras). . . . .	59
3.9	Illustration (a) du Théorème 4 (b) sa contraposée et (c), (d) sa réciproque. . . .	60
3.10	Les colonnes $C_k$ correspondent aux points de $S$ situés au-dessus du point $(k, 0)$ .	63
3.11	(a) $n_k$ tous impairs (b) $n_k$ tous pairs (c) certains $n_k$ impairs, certains $n_k$ pairs. .	64
3.12	(a) $(\lambda, b, h, \mu)$ , (b) $(n_1, \dots, n_s)$ , (c) animal $A$ à tester, à rotation près. . . .	65
3.13	L'animal d'inertie minimale pour $N = 17$ avec les disques $C_{a_0}$ et $C_{\min}$ (en gras).	67
4.1	Un chemin ouvert $u$ et un chemin fermé $v$ d'origine $\bullet$ . . . . .	74
4.2	Les points multiples interdits. . . . .	77
4.3	Quelques points multiples autorisés. . . . .	78
4.4	Demi-droite (a) initiale ; (b) finale. . . . .	78
4.5	Demi-droites intersectant un chemin. . . . .	79
4.6	Une région et ses quatres points extrémaux $O, N, E$ et $S$ . . . . .	80

4.7	Un polyomino simplement connexe et ses quatre points extrémaux saillants. . . . .	81
4.8	Exemples d'un point (a) saillant et (b) rentrant selon Daurat et Nivat. . . . .	83
4.9	Réseau hexagonal régulier . . . . .	85
4.10	$w = a\bar{c}a\bar{c}abababcbcb\bar{c}a\bar{c}a\bar{c}a\bar{c}a\bar{c}a\bar{c}b\bar{c}b\bar{c}b\bar{c}a\bar{c}ababcb\bar{c}a\bar{c}a\bar{c}a\bar{c}b$ . . . . .	85
4.11	Preuve de $S - R = 6$ pour les réseaux hexagonaux réguliers. . . . .	87
4.12	Un polyomino dans le réseau hexagonal ayant trois trous. . . . .	88
4.13	$S - R = \text{cste}$ est faux pour les réseaux triangulaires réguliers. . . . .	88
4.14	Les réseaux semi-réguliers (Grünbaum et Shephard, 1987). . . . .	89
4.15	Un contre-exemple de $S - R = \text{cste}$ pour le premier réseau semi-régulier . . . . .	89
5.1	Opération de $\mathcal{M}$ sur la croix et le carré (à changement d'échelle près). . . . .	95
5.2	Illustration du Théorème 7 : $\mathcal{M}$ vs $\mathcal{D}$ . . . . .	98
5.3	Les chemins (a) $d = \omega 1 \omega^3 \omega^4$ ; (b) $\delta \sqcup^* d = \omega^2 \omega^3 \cdot 1 \cdot \omega^2 \cdot \omega \cdot \omega^7 \omega^2 \omega^5 \sqcup^* d$ . . . . .	101
5.4	(a) Une $[a, b]$ -oreille $\varepsilon$ et (b) sa fermeture correspondante $\varepsilon^\cup$ . . . . .	104
5.5	Les oreilles $\varepsilon(\delta_0), \varepsilon(\delta_1), \varepsilon(\delta_2), \varepsilon(\delta_3)$ associées aux sous-mots $\delta_0, \delta_1, \delta_2, \delta_3$ . . . . .	105
5.6	Chemin polygonal : (a) original fermé $z$ (b) $\mathcal{M}(z)$ (c) $\mathcal{D}(z)$ . . . . .	105
5.7	Trois sommets consécutifs : (a) de $z$ ; (b) de $\xi = \mathcal{D}(z)$ . . . . .	106
5.8	Les $[0, 1]$ -oreilles correspondantes. . . . .	107
6.1	$I_{i_1} \times I_{i_2} \times I_{i_3} \subseteq \mathbb{R}^5$ où $i_1 = 2, i_2 = 4, i_3 = 5$ . . . . .	125
6.2	Frontière : (a) chemin orienté (b) combinaison linéaire de segments. . . . .	129
0.3	Un triangle orienté positivement et négativement. . . . .	153
0.4	Polyomino d'allure humaine. . . . .	154

## RÉSUMÉ

Les polyominos sont souvent représentés par des mots de quatre lettres ou des mots de changements de direction décrivant leur contour. La combinatoire des mots classique y joue donc un rôle descriptif important, particulièrement dans le choix d'un représentant canonique. Les mots de Lyndon fournissent, de façon naturelle, un tel représentant.

Une approche systématique pour le calcul de propriétés des polyominos, basée sur une version originale d'une discrétisation du théorème de Green classique en calcul bivarié, est élaborée.

Ceci nous a naturellement amené à analyser les propriétés géométriques d'ensembles du réseau discret de *rondeur* maximale. Pour une taille donnée, ces ensembles minimisent le moment d'inertie par rapport à un axe passant par leur centre de gravité. Nous introduisons la notion de *quasi-disque* et montrons entre autres que ces ensembles minimaux sont des polyominos *fortement-convexes*. Nous développons également un algorithme permettant de les engendrer systématiquement.

Un autre aspect concerne des propriétés sur les contours d'ensembles discrets donnant lieu à une nouvelle démonstration d'un résultat de Daurat et Nivat sur les points dits *saillants* et *rentrants* d'un polyomino. Nous présentons également une généralisation de ce résultat aux réseaux hexagonaux et montrons que le résultat est faux pour les autres réseaux *semi-réguliers*.

Nous poursuivons par l'introduction d'opérations de *mélange* spéciaux sur des mots décrivant des chemins discrets selon la suite de leurs changements de direction. Ces opérations de mélange permettent d'engendrer des courbes fractales du type *courbe de dragon* et d'analyser certains de leurs invariants.

Finalement, une généralisation aux dimensions supérieures des algorithmes précédents basés sur le théorème de Green discret, est présentée. Plus particulièrement, nous développons une version discrète du théorème de Stokes basée sur des familles de poids sur les hypercubes de dimension  $k$  dans l'espace discret  $\mathbb{Z}^n$ ,  $k \leq n$ . Quelques applications sont également décrites.

**Mots-clés :** Géométrie discrète, combinatoire des mots, ensembles discrets, polyominos, quasi-disques, chemins polygonaux, courbes de dragon, théorème de Green discret, théorème de Stokes discret, algorithmes.

## INTRODUCTION

Le domaine dans lequel mes travaux se situent est la géométrie discrète qui consiste entre autres à étudier les propriétés géométriques d'ensembles finis dans un espace donné. Cette branche des mathématiques, apparue récemment sous l'impulsion du développement de l'informatique, vise à adapter des concepts géométriques classiques à un ensemble de points d'un réseau régulier. Cette discrétisation contribue grandement à l'étude théorique des modèles d'objets spatiaux que l'on peut manipuler avec un ordinateur et des opérations que l'on effectue sur ces modèles. En particulier, les figures en infographie discrète sont souvent représentées par leur contour qui, lui, peut être codé, en l'occurrence, par un mot sur un alphabet de quatre lettres, par un mot décrivant une suite de changements de direction ou par une liste d'hypercubes. Ces représentations sont aussi fondamentales en analyse et en traitement d'images dont les domaines d'applications couvrent l'imagerie médicale, la télédétection par satellite, la morphologie, la météorologie, la géomorphologie, la synthèse d'images et plusieurs autres. Un des problèmes génériques consiste à reconstruire une image à partir de données partielles pour en assurer une interprétation correcte (on parle souvent de classification). Une instance de ce type de problèmes est par exemple, en tomographie discrète, celui de la reconstruction d'un ensemble fini de points à partir de ses projections selon différents axes.

Les *polyominos* sont des objets du plan discret composés de cellules contigües et constituent les objets bi-dimensionnels de base en infographie discrète. Plus généralement, les ensembles discrets incluant les polyominos, les animaux, les hypercubes et plusieurs autres, constituent les principaux objets d'études en géométrie discrète et en infographie. On retrouve leur utilisation dans tous les domaines ci-haut mentionnés et les problèmes algorithmiques sous-jacents sont la plupart du temps difficiles. Il est donc important d'étudier les algorithmes liés à ces objets.

Ce document est une présentation de mes travaux effectués au cours de mon doctorat. Il est composé de six chapitres visant des objectifs distincts.

Le premier chapitre est assez court ; il est employé à décrire certaines notions de base relatives à nos objets à l'étude. Les polyominos, destinés bien sûr à généraliser nos dominos familiers seront représentés ici par des mots. Afin de rappeler la terminologie usuelle se rapportant à la combinatoire des mots, quelques généralités élémentaires sur les mots sont énoncées.

Dans le deuxième chapitre, nous utilisons le théorème de Green et le calcul des différences finies à deux variables pour développer des algorithmes permettant d'évaluer diverses statistiques sur les polyominos. Celles-ci incluent l'aire, les coordonnées du centre de gravité, le moment d'inertie, les moments d'ordre supérieur, les vecteurs de projections verticales et horizontales, le nombre de pixels en commun avec un ensemble donné de pixels et certaines  $q$ -statistiques.

Le troisième chapitre est consacré à l'analyse de propriétés géométriques d'ensembles discrets du plan qui minimisent leur moment d'inertie. Ces ensembles s'apparentent à des disques discrets que nous appelons des *quasi-disques*. Un algorithme efficace pour les engendrer systématiquement est décrit.

Le quatrième chapitre traite d'un autre aspect qui concerne les propriétés de contours de classes d'ensembles discrets. Celles-ci donnent lieu à une nouvelle démonstration d'un résultat de Daurat et Nivat concernant les points dits *saillants* et *rentrants* d'un polyomino. Une analyse de résultats analogues sur les réseaux *réguliers* et *semi-réguliers* est également présentée.

Dans le cinquième chapitre, nous introduisons de nouvelles opérations de *mélange* sur des mots codant des chemins discrets selon une suite de changements de direction. Ces opérations de mélange permettent d'engendrer efficacement des courbes fractales du type *courbe de dragon* et d'énoncer des conditions garantissant l'invariance de leurs aires et de leurs centres de gravité.

Dans le dernier chapitre, une généralisation aux dimensions supérieures de plusieurs des algorithmes du Chapitre 2 est établie en développant une version discrète du théorème de Stokes basée sur des *familles de poids* sur des *hypercubes* de dimension  $k$  dans l'espace discret de dimension  $n$ . Quelques applications sont aussi données.



Le but principal de cette thèse est donc d'étudier des approches novatrices qui permettent de développer des algorithmes pour le traitement et l'analyse d'images. La démarche proposée est à la fois théorique et pratique : d'une part le cadre théorique est nouveau et permet de traiter de familles d'algorithmes dans un cadre unifié ; d'autre part les algorithmes qui en découlent méritent d'être implémentés de façon efficace.

## Chapitre I

### NOTIONS DE BASE SUR LES POLYOMINOS

Ce chapitre vise à présenter la terminologie, la notation et certaines notions relatives aux polyominos, qui seront omniprésents tout au long de cette dissertation. Comme ces objets seront codés, la plupart du temps par des mots, les notions de base se rapportant à la combinatoire des mots sont nécessaires et requièrent un bref rappel. Pour la terminologie usuelle, on se rapporte à Lothaire (Lothaire, 1997; Lothaire, 2002; Lothaire, 2005). Il convient sans doute, pour commencer, de faire un survol rapide sur l'origine de ces objets élémentaires. Leur apparition semble émerger de diverses sources indépendantes, notamment en mathématiques, souvent catégorisées dans la rubrique mathématiques récréatives, et en physique. C'est par Golomb, en 1954, dans un article sur les pavages de rectangles par des polyominos (Golomb, 1954), que le vocable polyomino semble avoir été introduit pour la première fois. Dans les années suivantes, certains auteurs optent pour le terme  $n$ -omino (Klamer et Rivest, 1973; Bender, 1974). Parallèlement, en 1956, Temperley établit un rapprochement entre certains problèmes relevant de la physique statistique et l'énumération de domaines correspondant précisément aux polyominos sans trou du réseau carré (Temperley, 1956). Un autre problème relié aux polyominos concerne les problèmes de pavages dont les travaux pionniers remontent aux années 50 (Golomb, 1954; Gardner, 1957; Golomb, 1989; Conway et Lagarias, 1990). Plus récemment, ces problèmes ont été abordés sous une autre approche. On s'intéresse plutôt à la *décidabilité* de certains problèmes de pavages qu'à la possibilité de paver une forme particulière (Robinson, 1971; Beauquier, 1991; Beauquier et Nivat, 1991; Brlek, Fedou et Provençal, 2008).

## 1.1 Généralités sur les mots

Soit  $\Sigma$  un ensemble fini de *lettres* appelé *alphabet*. Un *mot*  $w$  est une suite finie de lettres de  $\Sigma$ , c'est-à-dire une fonction

$$w : \{1, \dots, n\} \longrightarrow \Sigma, \quad n \in \mathbb{N},$$

et l'on écrit  $w = w_1 w_2 \dots w_n$  où  $w_i \in \Sigma$ ,  $1 \leq i \leq n$ . On désigne parfois la  $i$ -ème lettre de  $w$  par  $w[i]$ . L'entier  $n$  est la *longueur* de  $w$ , notée  $|w|$ . Si  $n = 0$ , alors le mot est appelé *mot vide*, et est noté  $\epsilon$ . L'ensemble des mots de longueur  $n$  sur  $\Sigma$  est noté  $\Sigma^n$ , pour  $n \geq 0$ . Le monoïde libre engendré par  $\Sigma$  est défini par  $\Sigma^* = \bigcup_{n \geq 0} \Sigma^n$  et constitue l'ensemble de tous les mots muni de l'opération binaire de *concaténation*. Soit  $w \in \Sigma^*$ . Un *facteur*  $f$  de  $w$  est un mot  $f \in \Sigma^*$  satisfaisant

$$\exists x, y \in \Sigma^*, w = xfy.$$

De plus, si  $x \neq \epsilon$  et  $y \neq \epsilon$  alors  $f$  est dit *facteur propre* de  $w$ . Si  $x = \epsilon$  (resp.  $y = \epsilon$ ) alors  $f$  est appelé *préfixe* (resp. *suffixe*). On dit qu'il est *préfixe propre* (resp. *suffixe propre*) si  $y \neq \epsilon$  (resp.  $x \neq \epsilon$ ). L'ensemble de tous les facteurs de  $w$  est noté  $F(w)$ , et  $F_n(w) = F(w) \cap \Sigma^n$  est l'ensemble des facteurs de longueur  $n$ . On désigne aussi  $\text{Pref}(w)$  l'ensemble de tous les préfixes de  $w$  et  $\text{Pref}_n(w) = \text{Pref}(w) \cap \Sigma^n$ , l'ensemble de tous les préfixes de longueur  $n$ . De même, on peut définir  $\text{Suff}(w)$ , l'ensemble de tous les suffixes de  $w$ , et  $\text{Suff}_n(w)$  l'ensemble de tous les suffixes de longueur  $n$ .

Une *occurrence* d'un facteur  $f$  dans le mot  $w$  est l'apparition de  $f$  à une certaine position. Plus précisément,  $f = f_1 \dots f_k$  apparaît à la position  $i$  dans  $w$  si et seulement si

$$\exists i, 1 < i < n, \text{ tel que } f = w_i w_{i+1} \dots w_{i+k-1}.$$

L'ensemble des occurrences est donc une fonction définie par

$$\text{Occ} : \Sigma^* \times \Sigma^* \longrightarrow 2^{\mathbb{N}},$$

$$\text{Occ}(f, w) = I = \{i \in \mathbb{N} \mid f = w_i w_{i+1} \dots w_{i+k-1}\}.$$

Le nombre d'occurrences d'un facteur  $f \in \Sigma^*$  est  $|w|_f$ . Un *bloc* de longueur  $k$ , est un facteur de la forme particulière  $f = \alpha^k$ , avec  $\alpha \in \Sigma$ . Si  $w = pu$  avec  $p, u \in \Sigma^*$ , et  $|w| = n$ ,  $|p| = k$ , alors  $p^{-1}w = w[k+1] \dots w[n] = u$  est le mot obtenu en effaçant  $p$ .

L'image miroir  $\widetilde{w}$  de  $w = w_1 w_2 \cdots w_n \in \Sigma^n$  est l'unique mot satisfaisant

$$\widetilde{w}_i = w_{n-i+1}, \forall 1 \leq i \leq n.$$

Un *palindrome* est un mot  $p \in \Sigma^*$  tel que  $p = \widetilde{p}$ . L'ensemble des facteurs d'un mot  $w$  qui sont des palindromes est noté par  $\text{Pal}(w)$ .

Soit deux mots  $u, v \in \Sigma^*$ . On dit que  $u$  et  $v$  sont *conjugués* s'il existe des mots  $x, y$  tels que  $u = xy$  et  $v = yx$ . Il est facile de vérifier que la relation de conjugaison, étant à la fois réflexive, symétrique et transitive, est en effet une relation d'équivalence. En particulier, la classe d'équivalence de  $w$ , notée  $[w]$ , correspond à l'ensemble des permutations cycliques de  $w$  et la longueur est invariante sous la conjugaison. Ainsi, pour tout mot  $w \in [w]$ , il est significatif d'écrire  $|[w]| = |w|$ . Dans le but de fournir un représentant naturel pour la classe, on introduit un ordre total sur les mots. On peut classer les mots selon plusieurs relations d'ordre, mais dans la suite, on utilisera l'*ordre lexicographique* défini comme suit.

**Définition 1** Soit  $\Sigma$  un alphabet ordonné, et  $u, v \in \Sigma^*$ . L'ordre lexicographique, noté  $\leq$ , est défini par :  $u \leq v$  si  $u = xau'$ ,  $v = xbv'$  avec  $x, u', v' \in \Sigma^*$ ,  $a, b \in \Sigma$  et  $a < b$ .

Un mot  $w \in \Sigma^+$  est dit *primitif* s'il n'est pas puissance d'un autre, c'est-à-dire que si  $w = u^n$  pour  $u \in \Sigma^+$ , alors  $n = 1$ .

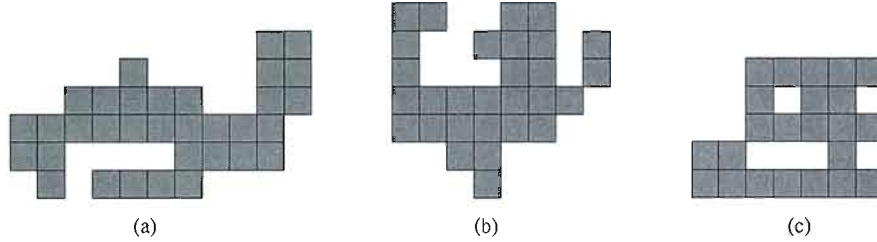
**Définition 2** Soit  $\Sigma$  un alphabet ordonné. Un mot primitif est un mot de Lyndon s'il est minimal pour l'ordre lexicographique dans sa classe de conjugaison.

Ainsi les mots de Lyndon, introduits par Lyndon (Lyndon, 1954; Lyndon, 1955), offrent un représentant naturel pour les classes de conjugaison.

## 1.2 Définitions préliminaires sur les polyominos

Plusieurs variantes sont associées au concept de polyomino. Plus précisément, celle que nous utiliserons le plus fréquemment dans cet ouvrage est basée sur la définition suivante :

**Définition 3** Un polyomino  $P$  est un objet du plan qui est une réunion finie de cellules unitaires fermées (pixels) attachées par leurs côtés et disposées de manière 4-connexe : pour toute paire de pixels  $p_1, p_2 \in P$ , il existe un chemin allant de l'un vers l'autre en traversant les pixels par les côtés (Figure 1.1 (a)). De plus, on suppose que les polyominos sont simplement connexes au sens topologique (sans trou) (Figure 1.1 (b), (c)).



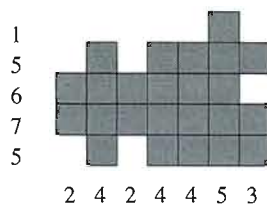
**Figure 1.1** (a) Un polyomino (b) pas 4-connexe (c) pas simplement connexe.

Par la suite, pour fixer les notations, on supposera que les cellules d'un polyomino sont des carrés unitaires,  $[i, i + 1] \times [j, j + 1]$ , où  $i$  et  $j$  sont des entiers et dont les côtés sont parallèles aux axes du plan cartésien  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ .

Pour  $i \in \mathbb{Z}$ , on définit la  $i$ -ème colonne d'un polyomino  $P$  comme l'intersection de la bande verticale  $[i, i + 1] \times \mathbb{R}$  avec  $P$ , notée  $([i, i + 1] \times \mathbb{R}) \cap P$ . De même, pour  $j \in \mathbb{Z}$ , la  $j$ -ème ligne de  $P$  est définie par  $(\mathbb{R} \times [j, j + 1]) \cap P$ .

**Définition 4** La  $i$ -ème projection verticale d'un polyomino  $P$  est le nombre de cellules contenues dans la  $i$ -ème colonne. La  $j$ -ème projection horizontale est le nombre de cellules contenues dans la  $j$ -ème ligne de  $P$ .

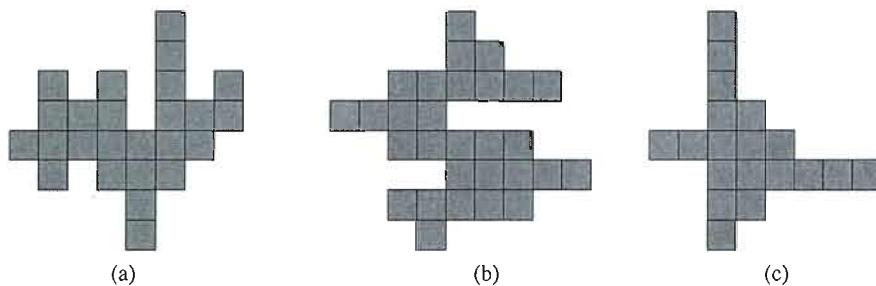
On notera les vecteurs de projections verticales et horizontales non nulles respectivement par  $V = (v_1, v_2, \dots, v_m) \in \mathbb{N}^m$  et  $H = (h_1, h_2, \dots, h_n) \in \mathbb{N}^n$  (Figure 1.2).



**Figure 1.2**  $V = (2, 4, 2, 4, 4, 5, 3)$  et  $H = (5, 7, 6, 5, 1)$ .

Il existe plusieurs sous-classes de polyominos. Les principales sont généralement définies par des contraintes relevant de la notion de *convexité*.

**Définition 5** Un polyomino  $P$  est verticalement convexe, noté *v-convexe*, lorsque toutes les colonnes de  $P$  sont connexes (Figure 1.3 (a)). De façon analogue, un polyomino est horizontalement convexe, noté *h-convexe* lorsque toutes les lignes de  $P$  sont connexes (Figure 1.3 (b)). Un polyomino qui est à la fois verticalement et horizontalement convexe est dit *hv-convexe* (Figure 1.3 (c)).



**Figure 1.3** Un polyomino (a) *v-convexe* ; (b) *h-convexe* ; (c) *hv-convexe*.

Notons que la convexité comme notion élémentaire est essentielle dans le cadre de l'étude des figures en géométrie discrète. Comme plusieurs variantes existent, une précision quant au choix de la définition de convexité discrète utilisée, s'avère nécessaire. Une attention particulière sera donc accordée à cette notion dans le Chapitre 3.

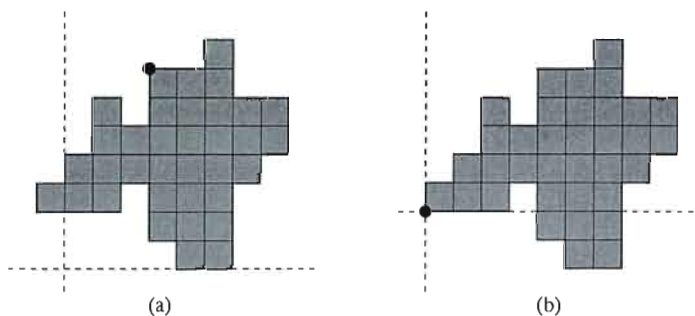
### 1.3 Différentes représentations

Parmi les outils pouvant faciliter la description d'une construction des objets étudiés, mentionnons les codages. En effet, la géométrie des polyominoes généraux est codable de manière exacte et finie. Dans le présent travail, le contour d'un polyomino sera d'abord codé par un mot sur un alphabet à quatre lettres  $\Sigma = \{a, \bar{a}, b, \bar{b}\}$ . Pour ce faire, on se choisit pour origine un sommet d'une cellule sur le contour, puis on code le déplacement d'un crayon comme suit :

$$a = (1, 0) : \rightarrow; \quad b = (0, 1) : \uparrow; \quad \bar{a} = (-1, 0) : \leftarrow; \quad \bar{b} = (0, -1) : \downarrow.$$

Le contour obtenu est un mot  $w \in \Sigma^*$ . Cette représentation, où chaque lettre correspond à une translation unitaire du plan est aussi connu sous le nom de code de Freeman (Maloñ et Freeman, 1961; Freeman, 1970) (voir aussi (Braquelaire et Vialard, 1999)). Un peu plus tard dans cet ouvrage, d'autres représentations seront considérées mais pour les fins du chapitre suivant, celle-ci sera parfaitement adaptée. Le contour du polyomino, décrit par un mot  $w$ , sera parcouru dans le sens anti-horaire à partir d'un point  $s$ . Par exemple, le polyomino de la Figure 1.4 (a) est codé par  $(s, w)$  où  $s = (3, 7)$  et

$$w = \bar{b}\bar{b}\bar{a}\bar{b}\bar{a}\bar{b}\bar{b}\bar{a}\bar{b}\bar{a}\bar{b}\bar{a}\bar{a}a\bar{a}b\bar{a}\bar{b}\bar{a}\bar{b}\bar{a}a\bar{b}\bar{b}\bar{b}a\bar{b}\bar{b}\bar{a}\bar{b}\bar{a}\bar{b}\bar{a}\bar{a}.$$



**Figure 1.4** Point de départ : (a) arbitraire ; (b) canonique.

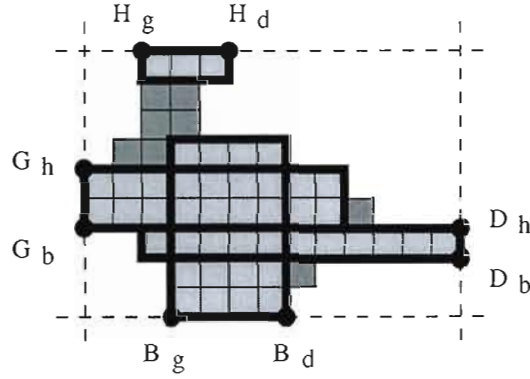
On notera  $P = (s, w)$ . On supposera que  $s$  est le point le plus bas parmi les points les plus à gauche de la colonne d'extrême gauche du polyomino et que par une translation adéquate





On peut également classifier les polyominos selon leur *points extrémaux* calculés sur le plus petit rectangle circonscrit du polyomino.

**Définition 6** Soit un polyomino  $P$  et  $\mathcal{R}$  le plus petit rectangle le contenant. Désignons par  $B$ ,  $D$ ,  $H$ ,  $G$ , les côtés respectivement du bas, de droite, du haut et de gauche de  $\mathcal{R}$ . Les points extrémaux de  $P$  sont définits par  $B_g$  et  $B_d$  (resp.  $H_g$  et  $H_d$ ) qui sont les points de  $P$  le plus à gauche et le plus à droite de  $B$  (resp.  $H$ ) ainsi que  $D_b$  et  $D_h$  (resp.  $G_b$  et  $G_h$ ) qui sont les points de  $P$  le plus haut et le plus bas de  $D$  (resp.  $G$ ) (voir Figure 1.6).



**Figure 1.6** Points extrémaux d'un polyomino :  $B_g$ ,  $B_d$ ,  $D_b$ ,  $D_h$ ,  $H_d$ ,  $H_g$ ,  $G_h$ ,  $G_b$ .

Une autre façon de caractériser les polyominos est d'identifier ce qu'on appelle les *pieds*.

**Définition 7** Considérons un polyomino  $P$  et  $\mathcal{R}$  le rectangle de dimension  $n \times m$  le contenant. Soit  $[B_g, B_d]$  ( $[D_b, D_h]$ ,  $[H_g, H_d]$ ,  $[G_h, G_b]$ ), l'intersection de  $P$  avec  $B$  ( $D$ ,  $H$ ,  $G$ ). Le segment  $[B_g, B_d]$  détermine la base de l'ensemble formé des  $h_1$  colonnes consécutives de  $P$ , appelé pied et noté  $B'$ . De façon analogue, en se référant aux intersections de  $P$  avec  $[D_b, D_h]$ ,  $[H_g, H_d]$ ,  $[G_h, G_b]$ , on définit les trois autres pieds de  $P$ , notés respectivement  $D'$ ,  $H'$  et  $G'$  (voir Figure 1.6).

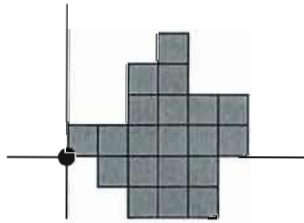
## Chapitre II

### ALGORITHMES RELIÉS AU THÉORÈME DE GREEN DISCRET

Dans ce chapitre nous proposons divers algorithmes permettant d'évaluer certaines statistiques sur les polyominos.

Plusieurs des paramètres associés aux polyominos (voir Figure 2.1) peuvent être représentés par des intégrales de surface. Par exemple, l'aire  $a = a(\mathbf{P})$ , le centre de gravité  $g = g(\mathbf{P})$ , le moment d'inertie  $I = I(\mathbf{P})$ , d'un polyomino  $\mathbf{P}$  peuvent être déterminés à l'aide d'intégrales doubles :

$$\begin{aligned}a(\mathbf{P}) &= \iint_{\mathbf{P}} dx dy, \\g(\mathbf{P}) &= (\bar{x}, \bar{y}) = \left( \frac{\iint_{\mathbf{P}} x dx dy}{a(\mathbf{P})}, \frac{\iint_{\mathbf{P}} y dx dy}{a(\mathbf{P})} \right), \\I(\mathbf{P}) &= \iint_{\mathbf{P}} ((x - \bar{x})^2 + (y - \bar{y})^2) dx dy = \iint_{\mathbf{P}} (x^2 + y^2) dx dy - (\bar{x}^2 + \bar{y}^2)a(\mathbf{P}).\end{aligned}$$



Aire = 20

Centre de gravité = (3.3, 0.55)

Moment d'inertie = 73.4833

Projections horizontales = (3,4,6,4,2,1)

Projections verticales = (1,2,5,6,4,2)

Figure 2.1 Quelques paramètres sur les polyominos.

La version classique du théorème de Green relie essentiellement les intégrales de surface aux intégrales de contour. En effet, comme nos polyominos sont définis par des mots décrivant leur contour, il devient alors naturel d'utiliser le théorème de Green afin de construire nos premiers algorithmes généraux. Nous introduisons ici la notion d'algorithme *incrémental* pour les polyominos définis par leur contour et montrons comment le théorème de Green peut être utilisé pour générer de telles familles d'algorithmes. Par la suite, en omettant les conditions de continuité du théorème, nous travaillons avec des algorithmes incrémentaux dits *additifs*. Plus précisément, ce sont des algorithmes pour lesquels le résultat associé à la somme de deux polyominos correspond à l'addition des résultats de chacun des polyominos. L'usage du théorème de Green en géométrie discrète est déjà connu, par exemple voir (Tang et Lien, 1988). Notre approche est semblable à celle décrite dans (Philips, 1993; Yang et Albrechtsen, 1994; Yang et Albrechtsen, 1996), où la version discrète du théorème de Green est appliquée aux calculs efficaces de moments. Par ailleurs, pour une présentation plus générale des propriétés voir (Golomb, 1994). On trouvera dans (Viennot, 1992), un survol de résultats énumératifs concernant les polyominos. Citons aussi (Clarke, 1980; Delest, Gouyou-Beauchamps et Vauquelin, 1987).

## 2.1 Théorème de Green

Pour débiter notre analyse, la version suivante du théorème de Green (McCallum, Hughes-Hallet et Gleason, 1999) nous est largement suffisante.

**Théorème 1** *Soit  $P(x, y)$  et  $Q(x, y)$ , deux fonctions continûment différentiables définies sur un ouvert contenant une région simplement connexe,  $\Omega$ , délimitée par une courbe simple,  $\Gamma$ , orientée positivement. Alors,*

$$\int \int_{\Omega} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \int_{\Gamma} P(x, y) dx + Q(x, y) dy.$$

Comme les paramètres énumérés précédemment impliquent des intégrales de la forme

$$\int \int_{\Omega} f(x, y) dx dy,$$

l'étape suivante consiste à choisir, dans le théorème de Green,  $P(x, y)$  et  $Q(x, y)$ , de sorte que  $(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}) = f$ . En effet, plusieurs couples de fonctions  $(P, Q)$  satisfont cette condition. Les trois principaux donnent lieu au lemme suivant.

**Lemme 2** Soit un polyomino  $\mathbf{P}$  avec un contour  $\gamma$ , et supposons  $f(x, y)$  une fonction continue. Alors on a,

$$\iint_{\mathbf{P}} f(x, y) dx dy = \int_{\gamma} f_1(x, y) dy \quad (2.1)$$

$$= - \int_{\gamma} f_2(x, y) dx \quad (2.2)$$

$$= \int_{\gamma} F(x, y)(x dy - y dx), \quad (2.3)$$

où

$$f_1(x, y) = \int^x f(x, y) dx, \quad f_2(x, y) = \int^y f(x, y) dy, \quad F(x, y) = \int_0^1 f(sx, sy) s ds.$$

La notation  $\int_{\gamma}$  désigne une intégrale de ligne sur le contour  $\gamma$  alors que  $\int^t \theta dt$  dénote une intégrale indéfinie selon la variable réelle  $t$ .

**Preuve.** Pour (2.1), on prend, dans le théorème de Green,  $P$  et  $Q$  tels que  $P = 0$  et  $Q = f_1$ . Pour (2.2), on choisit  $P = -f_2$  et  $Q = 0$ . La formule (2.3), moins triviale, peut s'établir de la façon suivante. Prenons, dans le théorème de Green,  $P(x, y) = -yF(x, y)$  et  $Q(x, y) = xF(x, y)$ . On doit alors montrer que  $(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}) = f$ . Pour ce faire, remarquons d'abord que

$$\left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) = 2F + x \frac{\partial F}{\partial x} + y \frac{\partial F}{\partial y}.$$

Considérant une variable supplémentaire  $u$  vérifiant l'inégalité  $0 < u \leq 1$ , on obtient,

$$\begin{aligned} u^2 F(ux, uy) &= u^2 \int_0^1 f(sux, suy) s ds \\ &= \int_0^u f(\sigma x, \sigma y) \sigma d\sigma \quad (\text{via } \sigma = su). \end{aligned}$$

Dérivant ensuite par rapport à  $u$ , on trouve

$$2uF(ux, uy) + u^2 \frac{\partial F}{\partial x}(ux, uy)x + u^2 \frac{\partial F}{\partial y}(ux, uy)y = uf(ux, uy).$$

Finalement, en posant  $u = 1$  on obtient l'égalité désirée

$$2F + x \frac{\partial F}{\partial x} + y \frac{\partial F}{\partial y} = f. \blacksquare$$

Remarquons que la preuve de la formule (2.3) du Lemme 2 utilise le théorème de Green et qu'elle est beaucoup plus algébrique que géométrique. Il existe cependant une preuve géométrique n'utilisant pas le théorème de Green, qui est présentée dans la Section 0.1 de l'Appendice A.

## 2.2 Algorithmes incrémentaux

L'évaluation de chacune des intégrales de ligne (2.1)-(2.3) du Lemme 2 peut se ramener à une succession d'intégrales simples sur des segments unitaires (horizontaux ou verticaux) formant  $\gamma$  :

$$\int_{\gamma} \alpha = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{[\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_{i+1}]} \gamma,$$

où  $\mathbf{v}_i = (x_i, y_i)$ ,  $i = 0, \dots, n-1$ , désigne les sommets successifs du polyomino  $\mathbf{P}$  satisfaisant  $\mathbf{v}_{i+1} = \mathbf{v}_i + \Delta \mathbf{v}_i = (x_i + \Delta x_i, y_i + \Delta y_i)$ , avec la convention  $\mathbf{v}_n = \mathbf{v}_0$ .

En supposant que les polyominos sont codés par  $(s, w)$  où  $s \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  correspond au point de départ et  $w$  à un mot sur l'alphabet  $\Sigma = \{a, b, \bar{a}, \bar{b}\}$ , la discussion précédente donne lieu à des algorithmes *incrémentaux* au sens suivant :

En partant du point source  $s$ , le contour  $\gamma$  du polyomino est décrit en parcourant  $w$  lettre par lettre. À chacune des étapes, l'instruction à exécuter dépend seulement de la position courante sur la frontière et de la nouvelle lettre lue.

Plus précisément, considérons quatre vecteurs associés à l'alphabet  $\Sigma$

$$\vec{a} = (1, 0), \quad \vec{b} = (0, 1), \quad \vec{\bar{a}} = (-1, 0), \quad \vec{\bar{b}} = (0, -1)$$

et prenons quatre fonctions

$$\Phi_a(x, y), \Phi_b(x, y), \Phi_{\bar{a}}(x, y), \Phi_{\bar{b}}(x, y),$$

chacune associée à une lettre de  $\Sigma$ . Le mot  $w = w_1 w_2 \dots w_n$  est parcouru séquentiellement, de gauche à droite en cumulant les sommes partielles dans la variable  $S$ . Il en résulte l'algorithme suivant :

```

 $\mathbf{v} := s; S := 0;$ 
pour  $i := 1$  à  $n$  faire
     $S := S + \Phi_{w_i}(\mathbf{v});$ 
     $\mathbf{v} := \mathbf{v} + \vec{w}_i;$ 
fin pour;
retourne  $S$ .

```

L'algorithme incrémental sera par la suite identifié par  $\bullet = \langle \Phi_a, \Phi_b, \Phi_{\bar{a}}, \Phi_{\bar{b}} \rangle$  et nous utiliserons la notation suggestive suivante afin de représenter le résultat d'un algorithme incrémental,

$$\text{Output}(\bullet, \mathbf{P}) = \sum_{\rightarrow} \Phi_a(x_i, y_i) + \sum_{\uparrow} \Phi_b(x_i, y_i) + \sum_{\leftarrow} \Phi_{\bar{a}}(x_i, y_i) + \sum_{\downarrow} \Phi_{\bar{b}}(x_i, y_i).$$

Les formules (2.1)-(2.3) du Lemme 2 donnent lieu à des algorithmes incrémentaux correspondants appelés respectivement *V-algorithme*, *H-algorithme* et *VH-algorithme*. Les lettres *V* et *H* sont des abréviations pour les mots vertical et horizontal. Dans le *V-algorithme* (resp. *H-algorithme*) seuls les côtés verticaux (resp. horizontaux) décrivant le polyomino sont considérés alors que dans le *VH-algorithme*, à la fois les côtés verticaux et horizontaux le sont.

**Proposition 1** *Soit le polyomino  $\mathbf{P} = (s, w)$ . Alors,*

$$\int \int_{\mathbf{P}} f(x, y) dx dy = \sum_{\rightarrow} \Phi_a(x_i, y_i) + \sum_{\uparrow} \Phi_b(x_i, y_i) + \sum_{\leftarrow} \Phi_{\bar{a}}(x_i, y_i) + \sum_{\downarrow} \Phi_{\bar{b}}(x_i, y_i),$$

où les fonctions  $\Phi_a, \Phi_b, \Phi_{\bar{a}}, \Phi_{\bar{b}}$  sont choisies parmi les trois ensembles suivants de possibilités :

*V-algorithme*

$$\Phi_a = 0, \quad \Phi_b = \int_0^1 f_1(x, y+t) dt, \quad \Phi_{\bar{a}} = 0, \quad \Phi_{\bar{b}} = - \int_0^1 f_1(x, y-t) dt.$$

*H-algorithme*

$$\Phi_a = - \int_0^1 f_2(x+t, y) dt, \quad \Phi_b = 0, \quad \Phi_{\bar{a}} = \int_0^1 f_2(x-t, y) dt, \quad \Phi_{\bar{b}} = 0.$$

*VH-algorithme*

$$\begin{aligned} \Phi_a &= -y \int_0^1 F(x+t, y) dt, & \Phi_b &= x \int_0^1 F(x, y+t) dt, \\ \Phi_{\bar{a}} &= y \int_0^1 F(x-t, y) dt, & \Phi_{\bar{b}} &= -x \int_0^1 F(x, y-t) dt, \end{aligned}$$

où  $f_1(x, y)$ ,  $f_2(x, y)$  et  $F(x, y)$  sont définies par (2.1), (2.2) et (2.3).

**Preuve.** Soit  $\alpha$  une des trois formes différentielles

$$f_1(x, y)dy, \quad -f_2(x, y)dx, \quad F(x, y)(xdy - ydx)$$

apparaissant dans les intégrales de ligne (2.1), (2.2), (2.3) du Lemme 2. Alors,

$$\iint_{\mathbf{P}} f(x, y) dx dy = \int_{\gamma} \alpha = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{[v_i, v_{i+1}]} \alpha,$$

où  $v_0, v_1, \dots, v_{n-1}, v_n (= v_0)$  sont les sommets appartenant au contour  $\gamma$  du polyomino  $\mathbf{P}$ .

Comme  $\mathbf{P}$  est défini par le point  $(x_0, y_0)$  et le mot  $w = w_1 w_2 \dots w_n$ , alors le segment  $[v_i, v_{i+1}]$

sur le contour de  $\mathbf{P}$  est paramétrisé par  $(x, y) = (x(t), y(t))$ ,  $0 \leq t \leq 1$ , où

$$x = x(t) = x_i + t, \quad y = y(t) = y_i, \quad (dx = dt, dy = 0), \quad \text{si } w_{i+1} = a,$$

$$x = x(t) = x_i, \quad y = y(t) = y_i + t, \quad (dx = 0, dy = dt), \quad \text{si } w_{i+1} = b,$$

$$x = x(t) = x_i - t, \quad y = y(t) = y_i, \quad (dx = -dt, dy = 0), \quad \text{si } w_{i+1} = \bar{a},$$

$$x = x(t) = x_i, \quad y = y(t) = y_i - t, \quad (dx = 0, dy = -dt), \quad \text{si } w_{i+1} = \bar{b}.$$

On conclut donc, en utilisant les paramétrisations correspondantes, par l'évaluation des intégrales de ligne (2.1), (2.2), (2.3) du Lemme 2. ■

### 2.3 Applications élémentaires et exemples

Quelques exemples élémentaires de ces algorithmes pour le calcul de  $\iint_{\mathbf{P}} f(x, y) dx dy$  sont présentés dans les tables suivantes : Table 2.1 (aire), où  $f(x, y) = 1$ ; Table 2.2 (centre de gravité), où  $f(x, y) = x$  et  $f(x, y) = y$ ; Table 2.3 (moment d'inertie), où  $f(x, y) = x^2 + y^2$ .



**Figure 2.2** Polyomino codé par le mot  $w = aababab\bar{a}b\bar{a}\bar{b}\bar{b}\bar{a}\bar{b}\bar{b}$ .

Nous illustrons ici certains calculs sur le polyomino défini par  $w = aababab\bar{a}b\bar{a}\bar{b}\bar{b}\bar{a}\bar{b}\bar{b}$  et  $s = (0, 0)$  de la Figure 2.2.

<i>Algorithme</i>	$\Phi_a$	$\Phi_b$	$\Phi_{\bar{a}}$	$\Phi_{\bar{b}}$
V-algo	0	$x$	0	$-x$
H-algo	$-y$	0	$y$	0
VH-algo	$-y/2$	$x/2$	$y/2$	$-x/2$

**Tableau 2.1** Aire.

*V-algo pour l'aire* :  $\sum_{\rightarrow} 0 + \sum_{\uparrow} x_i + \sum_{\leftarrow} 0 + \sum_{\downarrow} -x_i$ ,

$$\begin{aligned}
\iint_{\mathbf{P}} 1 \, dx \, dy &= 0 + 0 + x_2 + 0 + x_4 + 0 + x_6 + 0 + 0 + x_9 + 0 - x_{11} \\
&\quad - x_{12} + 0 - x_{14} - x_{15} \\
&= 2 + 3 + 4 + 2 - 1 - 1 \\
&= 9.
\end{aligned}$$

*H-algo pour l'aire* :  $\sum_{\rightarrow} -y_i + \sum_{\uparrow} 0 + \sum_{\leftarrow} y_i + \sum_{\downarrow} 0$ ,

$$\begin{aligned}
\iint_{\mathbf{P}} 1 \, dx \, dy &= -y_0 - y_1 + 0 - y_3 + 0 - y_5 + 0 + y_7 + y_8 + 0 + y_{10} + 0 + 0 \\
&\quad + y_{13} + 0 + 0 \\
&= -1 - 2 + 3 + 3 + 4 + 2 \\
&= 9.
\end{aligned}$$

*VH-algo pour l'aire* :  $\sum_{\rightarrow} -y_i/2 + \sum_{\uparrow} x_i/2 + \sum_{\leftarrow} y_i/2 + \sum_{\downarrow} -x_i/2$ ,

$$\begin{aligned}
\iint_{\mathbf{P}} 1 \, dx \, dy &= -y_0/2 - y_1/2 + x_2/2 - y_3/2 + x_4/2 - y_5/2 + x_6/2 + y_7/2 + y_8/2 \\
&\quad + x_9/2 + y_{10}/2 - x_{11}/2 - x_{12}/2 + y_{13}/2 - x_{14}/2 - x_{15}/2 \\
&= 1 - 1/2 + 3/2 - 1 + 2 + 3/2 + 3/2 + 1 + 2 - 1/2 - 1/2 + 1 \\
&= 9.
\end{aligned}$$



Algorithmme	$\Phi_a$	$\Phi_b$	$\Phi_{\bar{a}}$	$\Phi_{\bar{b}}$
V-algo (num $\bar{x}$ )	0	$x^2/2$	0	$-x^2/2$
V-algo (num $\bar{y}$ )	0	$x/2 + xy$	0	$x/2 - xy$
H-algo (num $\bar{x}$ )	$-y/2 - xy$	0	$-y/2 + xy$	0
H-algo (num $\bar{y}$ )	$-y^2/2$	0	$y^2/2$	0
VH-algo (num $\bar{x}$ )	$-y/6 - xy/3$	$x^2/3$	$-y/6 + xy/3$	$-x^2/3$
VH-algo (num $\bar{y}$ )	$-y^2/3$	$x/6 + xy/3$	$y^2/3$	$x/6 - xy/3$

Tableau 2.2 Centre de gravité.

V-algo : abscisse du centre de gravité :  $\sum_{-} 0 + \sum_{+} x_i^2/2 + \sum_{-} 0 + \sum_{+} -x_i^2/2$ ,

$$\begin{aligned}
 \iint_{\mathbf{P}} x \, dx \, dy &= 0 + 0 + x_2^2/2 + 0 + x_4^2/2 + 0 + x_6^2/2 + 0 + 0 + x_8^2/2 + 0 \\
 &\quad - x_{11}^2/2 - x_{12}^2/2 + 0 - x_{14}^2/2 - x_{15}^2/2 \\
 &= (2^2 + 3^2 + 4^2 + 2^2 - 1^2 - 1^2)/2 \\
 &= 31/2,
 \end{aligned}$$

d'où  $\bar{x} = \frac{31/2}{9} = \frac{31}{18}$ .

H-algo : abscisse du centre de gravité :  $\sum_{-} -y_i/2 - x_i y_i + \sum_{+} 0 + \sum_{-} -y_i/2 + x_i y_i + \sum_{+} 0$ ,

$$\begin{aligned}
 \iint_{\mathbf{P}} x \, dx \, dy &= (-y_0/2 - x_0 y_0) + (-y_1/2 - x_1 y_1) + 0 + (-y_3/2 - x_3 y_3) \\
 &\quad + 0 + (-y_5/2 - x_5 y_5) + 0 + (-y_7/2 + x_7 y_7) + (-y_8/2 + x_8 y_8) \\
 &\quad + 0 + (-y_{10}/2 + x_{10} y_{10}) + 0 + 0 + (-y_{13}/2 + x_{13} y_{13}) + 0 + 0 \\
 &= -5/2 - 7 + 21/2 + 15/2 + 6 + 1 = 31/2,
 \end{aligned}$$

d'où  $\bar{x} = \frac{31/2}{9} = \frac{31}{18}$ .

V-algo pour l'intégrale dans le moment d'inertie :

$$\begin{aligned}
 \iint_{\mathbf{P}} (x^2 + y^2) \, dx \, dy &= \sum_{+} x_i/3 + x_i^3/3 + x_i y_i + x_i y_i^2 + \sum_{-} -x_i/3 - x_i^3/3 + x_i y_i - x_i y_i^2 \\
 &= 74.
 \end{aligned}$$

V-algo	$\Phi_a = 0$	$\Phi_b = x/3 + x^3/3 + xy + xy^2$
	$\Phi_{\bar{a}} = 0$	$\Phi_{\bar{b}} = -x/3 - x^3/3 + xy - xy^2$
H-algo	$\Phi_a = -y/3 - y^3/3 - xy - x^2y$	$\Phi_b = 0$
	$\Phi_{\bar{a}} = y/3 + y^3/3 - xy + x^2y$	$\Phi_{\bar{b}} = 0$
VH-algo	$\Phi_a = -y/12 - y^3/4 - xy/4 - x^2y/4$	$\Phi_b = x/12 + x^3/4 + xy/4 + xy^2/4$
	$\Phi_{\bar{a}} = y/12 + y^3/4 - xy/4 + x^2y/4$	$\Phi_{\bar{b}} = -x/12 - x^3/4 + xy/4 - xy^2/4$

**Tableau 2.3** Algorithmes de  $\iint_{\mathbf{P}} (x^2 + y^2) dx dy$  dans le moment d'inertie.

L'exemple suivant calcule la probabilité qu'un point aléatoire  $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ , sous la distribution normale de probabilité à deux variables,  $f(x, y) = \frac{1}{\pi} \exp(-x^2 - y^2)$ , se situe dans un polyomino  $\mathbf{P}$  donné. Dans ce cas, comme le *VH-algorithme* est plus complexe, seuls les *V* et *H-algorithmes* sont donnés (voir Table 2.4). Par ailleurs, nous verrons qu'il est possible de considérer des fonctions discrètes  $f(x, y)$  en utilisant les méthodes décrites dans les Sections 2.4 et 2.5 où par exemple on calcule le nombre de pixels communs entre un polyomino et un ensemble donné de cellules.

V-algo	$\Phi_a = 0,$	$\Phi_b = \frac{1}{4} \operatorname{erf}(x)(\operatorname{erf}(y+1) - \operatorname{erf}(y)),$
	$\Phi_{\bar{a}} = 0,$	$\Phi_{\bar{b}} = \frac{1}{4} \operatorname{erf}(x)(\operatorname{erf}(y-1) - \operatorname{erf}(y)),$
H-algo	$\Phi_a = -\frac{1}{4} \operatorname{erf}(y)(\operatorname{erf}(x+1) - \operatorname{erf}(x)),$	$\Phi_b = 0,$
	$\Phi_{\bar{a}} = -\frac{1}{4} \operatorname{erf}(y)(\operatorname{erf}(x-1) - \operatorname{erf}(x)),$	$\Phi_{\bar{b}} = 0.$

**Tableau 2.4**  $f(x, y) = \frac{1}{\pi} \exp(-x^2 - y^2)$ ,  $\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(-t^2) dt$ .

De façon générale, en raison de leur formulation, les *V* et *H-algorithmes* sont plus simples que le *VH-algorithme* correspondant. Cependant, il existe une classe importante de fonctions pour laquelle le *VH-algorithme* est le plus souvent préférable : la classe des *fonctions homogènes*, c'est-à-dire, les fonctions  $f(x, y)$  qui satisfont une équation fonctionnelle de la forme  $f(sx, sy) = s^k f(x, y)$  pour une constante  $k$ , appelée le *degré d'homogénéité*. Le *VH-algorithme* correspondant est décrit maintenant.

**Corollaire 1** Soit  $f(x, y)$  une fonction continue, homogène de degré  $k > -2$  et soit

$\Phi_a, \Phi_b, \Phi_{\bar{a}}, \Phi_{\bar{b}}$ , les quatre fonctions définies par

$$\begin{aligned}\Phi_a(x, y) &= -\frac{y}{k+2}(f_1(x+1, y) - f_1(x, y)), & \Phi_b(x, y) &= \frac{x}{k+2}(f_2(x, y+1) - f_2(x, y)), \\ \Phi_{\bar{a}}(x, y) &= -\frac{y}{k+2}(f_1(x-1, y) - f_1(x, y)), & \Phi_{\bar{b}}(x, y) &= \frac{x}{k+2}(f_2(x, y-1) - f_2(x, y)),\end{aligned}$$

où  $f_1(x, y)$  et  $f_2(x, y)$  sont définies dans le Lemme 2. Alors, le VH-algorithme correspondant calcule  $\iint_{\mathbf{P}} f(x, y) dx dy$ , pour tout polyomino  $\mathbf{P}$ .

**Preuve.** Soit  $f(x, y)$  une fonction homogène de degré  $k$ . Alors, la fonction  $F(x, y)$  de la Proposition 1 prend la forme

$$F(x, y) = \int_0^1 f(sx, sy) s ds = \int_0^1 s^{k+1} f(x, y) ds = \frac{1}{k+2} f(x, y).$$

Donc, pour le VH-algorithme correspondant, on a,

$$\begin{aligned}\Phi_a(x, y) &= -\int_0^1 F(x+t, y) y dt = -\frac{y}{k+2} \int_0^1 f(x+t, y) dt = -\frac{y}{k+2} \int_x^{x+1} f(x, y) dx \\ &= -\frac{y}{k+2} (f_1(x+1, y) - f_1(x, y)),\end{aligned}$$

par définition de  $f_1(x, y)$ . En procédant de façon équivalente, on peut vérifier les formules pour  $\Phi_b, \Phi_{\bar{a}}$  et  $\Phi_{\bar{b}}$ . ■

Nous donnons ici une illustration typique du Corollaire 1 pour laquelle le VH-algorithme est plus simple que les  $V$  et  $H$ -algorithmes correspondants. Le calcul de la distance Euclidienne moyenne d'un point donné  $(u, v) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ , à un point aléatoire  $(x, y)$  dans un polyomino  $\mathbf{P}$  est donné par la formule

$$\frac{\iint_{\mathbf{P}} \sqrt{(x-u)^2 + (y-v)^2} dx dy}{a(\mathbf{P})}.$$

En effet, ceci peut se ramener au calcul d'intégrale de la forme  $\iint_{\mathbf{P}} f(x, y) dx dy$ , simplement en remplaçant le point de départ  $s = (x_0, y_0)$  par  $s = (u, v) = (x_0 - u, y_0 - v)$ . Ce qui consiste à prendre, dans le Corollaire 1,  $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$  et  $k = 1$ . Dans ce cas particulier, les fonctions  $f_1(x, y)$  et  $f_2(x, y)$  sont données par les formules

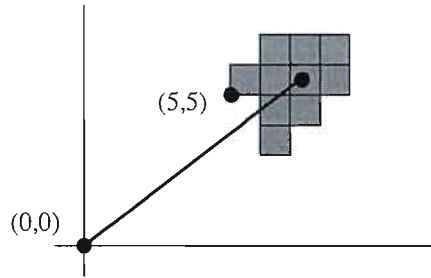
$$f_1(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2}x|x| & \text{si } y = 0, \\ \frac{1}{2}x\sqrt{x^2 + y^2} + \frac{1}{2}y^2 \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2}) & \text{sinon,} \end{cases}$$

et

$$f_2(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2}y|y| & \text{si } x = 0, \\ \frac{1}{2}y\sqrt{x^2 + y^2} + \frac{1}{2}x^2 \ln(y + \sqrt{x^2 + y^2}) & \text{sinon.} \end{cases}$$

On notera que  $f_1(0, 0) = f_2(0, 0) = 0$  en passant à la limite.

**Exemple.** Utilisant le programme développé en Maple (voir Section 0.3.1 dans Appendice A), nous trouvons que la distance moyenne de l'origine à un point aléatoire du polyomino de la Figure 2.3 est donnée par 8,961688230.



**Figure 2.3** Distance d'un point à l'origine.

Nous avons aussi appliqué notre algorithme au cas du pixel unitaire dont le coin inférieur gauche est à l'origine et obtenu une distance moyenne à l'origine de 0,7651957160. En guise de vérification, la génération aléatoire de 10000 points donne la valeur approchée 0,7651130129.

## 2.4 Notion d'algorithme incrémental additif

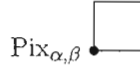
Dans les exemples précédents, on supposait la fonction  $f(x, y)$  continue. Cependant, il est souvent possible d'éliminer cette condition sur  $f$  tout en utilisant la Proposition 1 comme guide pour élaborer les algorithmes correspondants. Par exemple, les algorithmes pour le calcul des projections horizontales et verticales d'un polyomino peuvent être exprimées comme suit. Pour un entier  $\alpha \in \mathbb{Z}$ , définissons  $f$  par

$$f(x, y) = \chi(\alpha \leq x < \alpha + 1),$$

où  $\chi$  dénote la fonction caractéristique. Il est alors clair que  $\iint_{\mathbf{P}} f(x, y) dx dy$  correspond à la projection  $\alpha$ -verticale du polyomino  $\mathbf{P}$  :

$$\iint_{\mathbf{P}} f(x, y) dx dy = \#\{\beta \in \mathbb{Z} \mid \text{Pix}_{\alpha, \beta} \subseteq \mathbf{P}\} = v_{\alpha}(\mathbf{P}),$$

où  $\text{Pix}_{\alpha, \beta}$  est un pixel unitaire du plan dont la coordonnée  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  correspond au coin inférieur gauche



$$\text{Pix}_{\alpha, \beta} = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid \alpha \leq x < \alpha + 1, \beta \leq y < \beta + 1\}.$$

Dans ce cas, utilisant la Proposition 1, on trouve

$$f_1(x, y) = \int^x \chi(\alpha \leq x < \alpha + 1) dx = \begin{cases} 0 & \text{si } x < \alpha, \\ x - \alpha & \text{si } \alpha \leq x < \alpha + 1, \\ 1 & \text{si } \alpha + 1 \leq x. \end{cases}$$

Il est alors simple de vérifier que ceci donne bien les algorithmes suivants.

*V-algorithme pour les projections verticales  $v_{\alpha}(\mathbf{P})$  :*

$$\Phi_a = 0, \quad \Phi_b = \mathcal{X}(x \geq \alpha + 1), \quad \Phi_{\bar{a}} = 0, \quad \Phi_{\bar{b}} = -\mathcal{X}(x \geq \alpha + 1).$$

De façon similaire, prenant  $f(x, y) = \chi(\beta \leq y < \beta + 1)$ , les projections  $\beta$ -horizontales du polyomino  $\mathbf{P}$ , définies par

$$\#\{\alpha \in \mathbb{Z} \mid \text{Pix}_{\alpha, \beta} \subseteq \mathbf{P}\} = h_{\beta}(\mathbf{P}).$$

se calculent à partir de l'algorithme suivant.

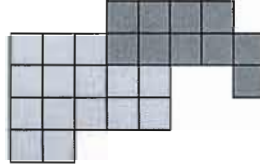
*H-algorithme pour les projections horizontales  $h_{\beta}(\mathbf{P})$  :*

$$\Phi_a = -\mathcal{X}(y \geq \beta + 1), \quad \Phi_b = 0, \quad \Phi_{\bar{a}} = \mathcal{X}(y \geq \beta + 1), \quad \Phi_{\bar{b}} = 0.$$

En effet, ces algorithmes pour les projections verticales et horizontales sont simplement des cas particuliers de la notion générale d'algorithme incrémental additif qu'on définit maintenant.

**Définition 8** Un algorithme incrémental  $\bullet = \langle \Phi_a, \Phi_b, \Phi_{\bar{a}}, \Phi_{\bar{b}} \rangle$  est appelé additif si, toutes les fois qu'un polyomino  $P$  est l'union de deux polyominos  $P_1, P_2$  ayant des intérieurs disjoints (voir Figure 2.4), on a

$$\text{Output}(\bullet, P) = \text{Output}(\bullet, P_1 \cup P_2) = \text{Output}(\bullet, P_1) + \text{Output}(\bullet, P_2).$$



**Figure 2.4**  $P = P_1 \cup P_2$  ayant des intérieurs disjoints.

Un exemple plutôt simple d'algorithme incrémental non-additif est donné par l'identité  $\Phi_a = \Phi_b = \Phi_{\bar{a}} = \Phi_{\bar{b}} = 1$ , qui calcule le périmètre d'un polyomino.

**Proposition 2** Un algorithme incrémental  $\bullet = \langle \Phi_a, \Phi_b, \Phi_{\bar{a}}, \Phi_{\bar{b}} \rangle$  est additif si et seulement si

$$\Phi_{\bar{a}}(x, y) = -\Phi_a(x - 1, y) \quad \text{et} \quad \Phi_{\bar{b}}(x, y) = -\Phi_b(x, y - 1). \quad (2.4)$$

De plus, le résultat obtenu par l'application d'un algorithme incrémental additif  $\bullet$ , sur un polyomino  $P$  est donné par

$$\text{Output}(\bullet, P) = \sum_{\text{Pix}_{\alpha, \beta} \subseteq P} \Delta_x \Phi_b(\alpha, \beta) - \Delta_y \Phi_a(\alpha, \beta), \quad (2.5)$$

où  $\Delta_x \Phi$  et  $\Delta_y \Phi$  sont des fonctions définies par  $\Delta_x \Phi(x, y) = \Phi(x + 1, y) - \Phi(x, y)$  et  $\Delta_y \Phi(x, y) = \Phi(x, y + 1) - \Phi(x, y)$ .

**Preuve.** Puisque tout polyomino  $P$  peut s'écrire comme la réunion finie de la fermeture de ses pixels,

$$P = \bigcup_{\text{Pix}_{\alpha, \beta} \subseteq P} \overline{\text{Pix}_{\alpha, \beta}},$$

le résultat d'un algorithme incrémental additif satisfait

$$\text{Output}(\bullet, P) = \sum_{\text{Pix}_{\alpha, \beta} \subseteq P} \text{Output}(\bullet, \overline{\text{Pix}_{\alpha, \beta}}).$$

En particulier, si  $\mathbf{P}_1 = p_1$  et  $\mathbf{P}_2 = p_2$  sont tous les deux de simples pixels et  $\mathbf{P}$  est un domino vertical comme illustré dans la Figure 2.5 (a), alors,

$$\text{Output}(\bullet, \mathbf{P}) = \text{Output}(\bullet, p_1 \cup p_2) = \text{Output}(\bullet, p_1) + \text{Output}(\bullet, p_2).$$

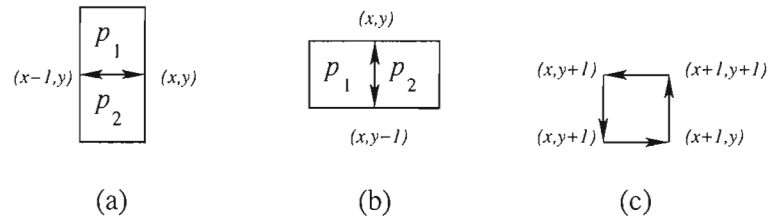
Ceci implique que  $\Phi_{\bar{a}}(x, y) = -\Phi_a(x - 1, y)$ , afin d'annuler la contribution du côté horizontal commun dans le polyomino  $\mathbf{P}$ . De même, en utilisant un domino horizontal (voir Figure 2.5 (b)), un argument similaire justifie que

$$\Phi_{\bar{b}}(x, y) = -\Phi_b(x, y - 1).$$

En conséquence, ceci montre que les conditions données sont nécessaires pour l'additivité. Leur suffisance découle de l'annulation automatique des frontières communes de  $\mathbf{P}_1$  et  $\mathbf{P}_2$  (voir Figure 2.4) pour les polyominos généraux ayant des intérieurs disjoints et tels que  $\mathbf{P} = \mathbf{P}_1 \cup \mathbf{P}_2$ . La formule associée à  $\text{Output}(\bullet, \mathbf{P})$  découle elle aussi de ces conditions, puisque pour tout pixel fermé  $\overline{\text{Pix}_{\alpha, \beta}}$ , on doit avoir (voir Figure 2.5 (c))

$$\begin{aligned} \text{Output}(\bullet, \overline{\text{Pix}_{\alpha, \beta}}) &= \Phi_a(\alpha, \beta) + \Phi_b(\alpha + 1, \beta) + \Phi_{\bar{a}}(\alpha + 1, \beta + 1) + \Phi_{\bar{b}}(\alpha, \beta + 1) \\ &= \Phi_a(\alpha, \beta) + \Phi_b(\alpha + 1, \beta) - \Phi_a(\alpha, \beta + 1) - \Phi_b(\alpha, \beta) \\ &= \Delta_x \Phi_b(\alpha, \beta) - \Delta_y \Phi_a(\alpha, \beta), \end{aligned}$$

pour tout algorithme incrémental additif.



**Figure 2.5** (a) Domino vertical, (b) domino horizontal, (c) un pixel  $\text{Pix}_{x, y}$ .

■

L'un des attraits de la Proposition 2 est, par exemple, de démontrer rigoureusement qu'un algorithme incrémental additif donné fonctionne effectivement. Par exemple, on peut vérifier, en utilisant ce résultat, que les algorithmes  $v_\alpha(\mathbf{P})$  et  $h_\beta(\mathbf{P})$  pour les projections verticales et horizontales sont bien valides. De même, toujours en utilisant la Proposition 2, on peut confirmer la validité des algorithmes incrémentaux à valeur booléenne de la Section 2.5.2. Une autre application de cette proposition consiste à créer de nouveaux algorithmes en choisissant d'abord arbitrairement deux fonctions  $\Phi_a(x, y)$ ,  $\Phi_b(x, y)$ ; en définissant ensuite les fonctions associées  $\Phi_{\bar{a}}(x, y)$ ,  $\Phi_{\bar{b}}(x, y)$  à partir de (2.4); et, finalement, en calculant la sortie correspondante en utilisant (2.5). Par exemple, si on pose  $\Phi_a(x, y) = 0$  et  $\Phi_b(x, y) = q^x$ , où  $q$  est une variable formelle, on trouve un algorithme donnant la  $q$ -énumération de la famille de projections. La Section 2.5.6 est justement consacrée à exposer ce cas particulier.

Par ailleurs, le corollaire suivant peut être interprété comme un inverse de la Proposition 2. Il décrit comment trouver  $\Phi_a(x, y)$ ,  $\Phi_b(x, y)$ ,  $\Phi_{\bar{a}}(x, y)$ ,  $\Phi_{\bar{b}}(x, y)$  à partir du résultat désiré. De plus, il montre aussi la relation étroite existant entre les algorithmes généraux incrémentaux additifs et le calcul des différences finies à deux variables.

**Corollaire 2** *Soit  $\mathbb{A}$  un anneau et  $W : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{A}$  une fonction de poids. Alors, l'algorithme incrémental additif,  $\langle \Phi_a, \Phi_b, \Phi_{\bar{a}}, \Phi_{\bar{b}} \rangle$  le plus général, ayant comme résultat*

$$\sum_{\text{Pix}_{x,y} \subseteq \mathbf{P}} W(x, y) \in \mathbb{A},$$

*pour chaque polyomino  $\mathbf{P}$ , est de la forme*

$$\begin{aligned} \Phi_a(x, y) &= V^0(x, y) + \Omega(x, y - 1) - \Omega(x - 1, y - 1), \\ \Phi_b(x, y) &= U^0(x, y) + \Omega(x - 1, y) - \Omega(x - 1, y - 1), \\ \Phi_{\bar{a}}(x, y) &= -\Phi_a(x - 1, y), \\ \Phi_{\bar{b}}(x, y) &= -\Phi_b(x, y - 1), \end{aligned}$$

*où  $(U^0(x, y), V^0(x, y))$  est une solution particulière de l'équation aux différences finies*

$$\Delta_x U(x, y) - \Delta_y V(x, y) = W(x, y)$$

*et  $\Omega : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{A}$  est arbitraire.*



**Preuve.** Comme l'équation aux différences finies est linéaire, il suffit de montrer (voir Proposition 2) que la solution générale  $(U, V)$  de l'équation homogène associée,

$$\Delta_x U(x, y) - \Delta_y V(x, y) = 0, \quad (2.6)$$

est donnée par

$$U(x, y) = \Omega(x-1, y) - \Omega(x-1, y-1), \quad (2.7)$$

$$V(x, y) = \Omega(x, y-1) - \Omega(x-1, y-1), \quad (2.8)$$

où  $\Omega(x, y)$  est arbitraire. En effet, en substituant (2.7) et (2.8) dans (2.6), on obtient

$$\begin{aligned} \Delta_x U - \Delta_y V &= [(\Omega(x, y) - \Omega(x, y-1)) - (\Omega(x-1, y) - \Omega(x-1, y-1))] \\ &\quad - [(\Omega(x, y) - \Omega(x-1, y)) - (\Omega(x, y-1) - \Omega(x-1, y-1))] \\ &= 0. \end{aligned}$$

Inversement, pour montrer qu'à toute solution  $(U, V)$  de l'équation homogène, correspond un  $\Omega$ , on introduit deux opérateurs auxiliaires de sommation,  $\Sigma_1^x$  et  $\Sigma_1^y$ , définis sur les fonctions  $g : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{A}$ , par

$$\Sigma_1^x g(x, y) = \begin{cases} \sum_{k=1}^x g(k, y) & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si } x = 0, \\ -\sum_{k=0}^{-x-1} g(-k, y) & \text{si } x < 0, \end{cases}$$

et similairement pour  $\Sigma_1^y g(x, y)$ . Le lecteur peut vérifier, que pour toute fonction  $\omega(x, y)$ , on a,

$$\nabla_x \omega(x, y) = \omega(x, y) - \omega(x-1, y) = g(x, y) \iff \omega(x, y) = \omega(0, y) + \Sigma_1^x g(x, y),$$

$$\nabla_y \omega(x, y) = \omega(x, y) - \omega(x, y-1) = g(x, y) \iff \omega(x, y) = \omega(x, 0) + \Sigma_1^y g(x, y),$$

et la fonction requise  $\Omega(x, y)$  peut être écrite comme

$$\Omega(x, y) = c + \Sigma_1^y U(1, y) + \Sigma_1^x V(x, y+1),$$

où  $c$  est une constante arbitraire (en fait,  $c = \Omega(0, 0)$ ). ■

Une façon parmi tant d'autres de trouver une solution particulière  $(U^0, V^0)$  de l'équation  $\Delta_x U - \Delta_y V = W$ , est de forcer  $V^0$  (resp.  $U^0$ ) égal à 0 et de prendre  $U^0$  (resp.  $V^0$ ) comme solution particulière de l'équation aux différences finies simple

$$\Delta_x U(x, y) = W(x, y), \quad (\text{resp. } -\Delta_y V(x, y) = W(x, y)),$$

avec la solution particulière

$$U^0 = \sum_1^x W(x-1, y), \quad V^0 = 0 \quad (\text{resp. } U^0 = 0, \quad V^0 = -\sum_1^y W(x, y-1)).$$

Cette méthode donne un *V-algorithme* (resp. *H-algorithme*) particulier. On peut aussi utiliser la méthode des séries formelles : soit  $z_1$  et  $z_2$  des variables formelles et considérons la série de Laurent formelle

$$\begin{aligned} \widehat{U}(z_1, z_2) &= \sum_{x,y} U(x, y) z_1^x z_2^y, \\ \widehat{V}(z_1, z_2) &= \sum_{x,y} V(x, y) z_1^x z_2^y, \\ \widehat{W}(z_1, z_2) &= \sum_{x,y} W(x, y) z_1^x z_2^y. \end{aligned}$$

Alors l'équation aux différences finies

$$\Delta_x U(x, y) - \Delta_y V(x, y) = W(x, y),$$

peut se reformuler de la manière suivante

$$(1 - z_1)z_2 \widehat{U}(z_1, z_2) - (1 - z_2)z_1 \widehat{V}(z_1, z_2) = z_1 z_2 \widehat{W}(z_1, z_2).$$

Grâce à quelques manipulations algébriques, cette dernière équation peut se résoudre pour  $\widehat{U}(z_1, z_2)$  et  $\widehat{V}(z_1, z_2)$ .

En outre, cette méthode a été utilisée pour trouver la solution générale de l'équation homogène apparaissant dans la preuve du Corollaire 2.

Une autre façon de déterminer les solutions des équations aux différences finies du Corollaire 2 est d'exprimer, si cela est possible,  $W(x, y)$  dans la base  $x^{(i)} y^{(j)}$ ,  $i, j \geq 0$ , où  $t^{(k)} = t(t-1) \dots (t-k+1)$  est la  $k$ -ième puissance factorielle descendante de  $t$ . Puisque  $\Delta_t t^{(k)} = k t^{(k-1)}$ , cette base est bien appropriée pour les équations aux différences finies. Cette méthode est décrite dans la Section 2.5.5 pour le calcul des moments d'ordres supérieurs d'un polyomino.

## 2.5 Autres exemples et applications

La présente section traite des relations entre ensembles quelconques de pixels et polyominoes. Il convient pour commencer, de considérer le cas le plus simple, qui consiste à déterminer si une cellule élémentaire est incluse ou non dans un polyomino. De nombreux résultats dont les opérations booléennes et les calculs de familles de projections en découlent.

### 2.5.1 Déterminer si un pixel donné est contenu dans un polyomino

Soit  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  et considérons la fonction booléenne-valuée suivante

$$W_{\alpha, \beta}(x, y) = \chi(x = \alpha)\chi(y = \beta).$$

Puisque,

$$\sum_{\text{Pix}_{x,y} \subseteq \mathbf{P}} W_{\alpha, \beta}(x, y) = \chi(\text{Pix}_{\alpha, \beta} \subseteq \mathbf{P}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \text{Pix}_{\alpha, \beta} \subseteq \mathbf{P}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

alors, on peut utiliser l'algorithme incrémental additif suivant afin de déterminer si le pixel défini par  $(\alpha, \beta)$  appartient ou non au polyomino  $\mathbf{P}$ .

*V-algorithme :*

$$\Phi_a = 0, \quad \Phi_b = \chi(x \geq \alpha + 1)\chi(y = \beta), \quad \Phi_{\bar{a}} = 0, \quad \Phi_{\bar{b}} = -\chi(x \geq \alpha + 1)\chi(y = \beta + 1).$$

*H-algorithme :*

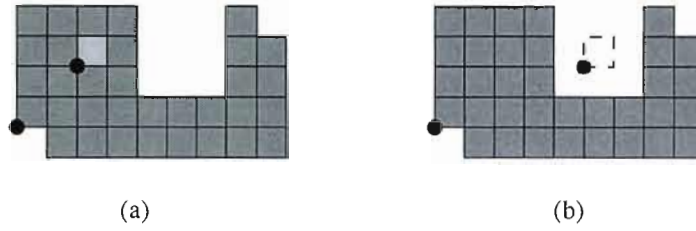
$$\Phi_a = -\chi(x = \alpha)\chi(y \geq \beta + 1), \quad \Phi_b = 0, \quad \Phi_{\bar{a}} = \chi(x = \alpha + 1)\chi(y \geq \beta + 1), \quad \Phi_{\bar{b}} = 0.$$

Par exemple, si on applique le *V-algorithme* au polyomino de la Figure 2.6 (a) avec  $(\alpha, \beta) = (2, 2)$  et à celui de la Figure 2.6 (b) avec  $(\alpha, \beta) = (5, 2)$ , on obtient respectivement (seuls les termes non-nuls sont indiqués) :

$$\begin{aligned} \chi(\text{Pix}_{2,2} \subseteq \mathbf{P}) &= \chi(x_{13} \geq 3)\chi(y_{13} = 2) - \chi(x_{18} \geq 3)\chi(y_{18} = 3) + \chi(x_{24} \geq 3)\chi(y_{24} = 2) \\ &= 1 - 1 + 1 \\ &= 1 \quad (\text{puisque, } \text{Pix}_{2,2} \subseteq \mathbf{P}) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 \chi(\text{Pix}_{5,2} \subseteq \mathbf{P}) &= \chi(x_{13} \geq 6)\chi(y_{13} = 2) - \chi(x_{18} \geq 6)\chi(y_{18} = 3) \\
 &= 1 - 1 \\
 &= 0 \quad (\text{puisque, } \text{Pix}_{5,2} \not\subseteq \mathbf{P}).
 \end{aligned}$$



**Figure 2.6** (a)  $\text{Pix}_{2,2}$  appartient au polyomino (b)  $\text{Pix}_{5,2}$  n'appartient pas au polyomino.

Évidemment, suivant le Corollaire 2, il est possible de déduire une famille non-dénombrable d'algorithmes  $\langle \Phi_a^{\alpha,\beta}, \Phi_b^{\alpha,\beta}, \Phi_{\bar{a}}^{\alpha,\beta}, \Phi_{\bar{b}}^{\alpha,\beta} \rangle$  à partir desquels on peut calculer  $\chi(\text{Pix}_{\alpha,\beta} \subseteq \mathbf{P})$ .

### 2.5.2 Opérations booléennes sur les polyominos

À partir de la fonction caractéristique  $\chi$ , il est possible d'établir de manière assez directe des formules pour les opérations booléennes sur les polyominos. Soit  $\mathbf{P}_1$  et  $\mathbf{P}_2$ , deux polyominos dont les contours sont donnés respectivement par  $v'_i = (x'_i, y'_i)$  pour  $i = 0, 1, \dots, n_1 - 1$ , et  $v''_j = (x''_j, y''_j)$  pour  $j = 0, 1, \dots, n_2 - 1$ .

**Proposition 3** *Le nombre de pixels dans  $\mathbf{P}_1 \cap \mathbf{P}_2$  est donné par*

$$\#(\mathbf{P}_1 \cap \mathbf{P}_2) = a(\mathbf{P}_1 \cap \mathbf{P}_2) = \sum_{\substack{0 \leq i < n_1, 0 \leq j < n_2 \\ i, j, \text{ assortis}}} \min(x'_i, x''_j) \Delta y'_i \Delta y''_j,$$

où la somme est prise sur l'ensemble des couples  $(i, j)$  qui sont assortis au sens suivant (voir

Figure 2.7 (a), (b), (c), (d)) :

$$(i, j) \text{ sont assortis} \iff \begin{cases} y'_i = y''_j \text{ et } \Delta y'_i = \Delta y''_j (= \pm 1), & \text{(Figure 2.7(a), (b)),} \\ \text{ou} \\ y'_i = y''_j - 1 \text{ et } \Delta y'_i = 1, \Delta y''_j = -1, & \text{(Figure 2.7(c)),} \\ \text{ou} \\ y'_i = y''_j + 1 \text{ et } \Delta y'_i = -1, \Delta y''_j = 1, & \text{(Figure 2.7(d)).} \end{cases}$$

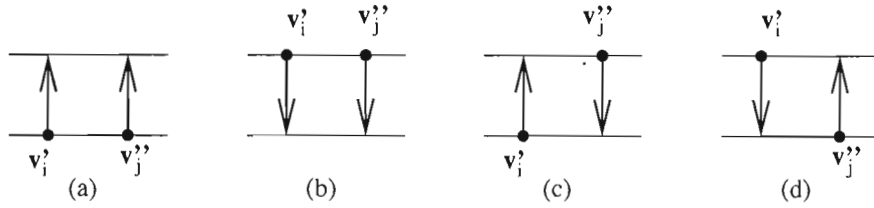


Figure 2.7 Paires assorties.

**Preuve.** Le nombre de pixels en commun entre  $P_1$  et  $P_2$  est donné par

$$\#(P_1 \cap P_2) = \sum_{(p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}} \chi(\text{Pix}_{p,q} \subseteq P_1) \chi(\text{Pix}_{p,q} \subseteq P_2).$$

En utilisant maintenant le *V-algorithme* tel que décrit à la Section 2.5.1, on a que

$$\chi(\text{Pix}_{p,q} \subseteq P) = \sum_i \Phi^{p,q}(v_i, \Delta v_i),$$

où  $\Phi^{p,q}(v, \Delta v) = \chi(x \geq p+1) \chi(y = q + \frac{1-\Delta y}{2}) \Delta y$ , puisque  $\Delta y = -1, 0$  ou  $1$ . Soit  $M$  (resp.  $N$ ) la borne inférieure pour tous les  $x'_i$  et  $x''_j$  (resp.  $y'_i$  et  $y''_j$ ).

Alors

$$\begin{aligned} \#(P_1 \cap P_2) &= \sum_{p \geq M, q \geq N} \sum_{i,j} \Phi^{p,q}(v'_i, \Delta v'_i) \Phi^{p,q}(v''_j, \Delta v''_j) \\ &= \sum_{i,j} \Omega(v'_i, \Delta v'_i, v''_j, \Delta v''_j), \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} \Omega(v', \Delta v', v'', \Delta v'') &= \sum_{p \geq M, q \geq N} \Phi^{p,q}(v', \Delta v') \Phi^{p,q}(v'', \Delta v'') \\ &= (\min(x', x'') - M) \theta_N(y', \Delta y', y'', \Delta y''), \end{aligned}$$

et où

$$\theta_N(y', \Delta y', y'', \Delta y'') = \begin{cases} 1 & \text{si } N \leq y' = y'' \text{ et } \Delta y' = \Delta y'' (= \pm 1), \\ -1 & \text{si } N \leq y', N \leq y'', y' = y'' - 1, \Delta y' = 1, \Delta y'' = -1, \\ -1 & \text{si } N \leq y', N \leq y'', y' = y'' + 1, \Delta y' = -1, \Delta y'' = 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Donc,

$$\#(\mathbf{P}_1 \cap \mathbf{P}_2) = \sum_{\substack{0 \leq i < n_1, 0 \leq j < n_2 \\ i, j, \text{ assortis}}} (\min(x'_i, x''_j) - M) \Delta y'_i \Delta y''_j,$$

et comme le terme de gauche ne dépend ni de  $M$ , ni de  $N$  la conclusion en découle. ■

De plus, suivant les formules de De Morgan, le nombre de pixels contenus respectivement dans l'union et la différence de deux polyominoes peuvent se calculer par

$$\begin{aligned} \#(\mathbf{P}_1 \cup \mathbf{P}_2) &= \#(\mathbf{P}_1) + \#(\mathbf{P}_2) - \#(\mathbf{P}_1 \cap \mathbf{P}_2), \\ \#(\mathbf{P}_1 \setminus \mathbf{P}_2) &= \#(\mathbf{P}_1) - \#(\mathbf{P}_1 \cap \mathbf{P}_2). \end{aligned}$$

### 2.5.3 Intersection entre un polyomino et un ensemble donné de pixels

Soit  $S$  un ensemble fixe de pixels, fini ou infini, et supposons que  $\langle \Phi_a^{p,q}, \Phi_b^{p,q}, \Phi_a^{p,q}, \Phi_b^{p,q} \rangle$  sont des algorithmes pour le calcul de

$$\chi(\text{Pix}_{p,q} \subseteq \mathbf{P}), \quad (p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}.$$

Pour déterminer si un polyomino  $\mathbf{P}$  intersecte  $S$ , on doit d'abord calculer

$$\chi(S \cap \mathbf{P} \neq \emptyset).$$

Cela s'obtient assez aisément en prenant  $\langle \Phi_a^S, \Phi_b^S, \Phi_a^S, \Phi_b^S \rangle$ , où

$$\begin{aligned} \Phi_a^S(x, y) &= \sup_{\text{pix}_{p,q} \subseteq S} \Phi_a^{p,q}(x, y), & \Phi_b^S(x, y) &= \sup_{\text{pix}_{p,q} \subseteq S} \Phi_b^{p,q}(x, y), \\ \Phi_a^S(x, y) &= \sup_{\text{pix}_{p,q} \subseteq S} \Phi_a^{p,q}(x, y), & \Phi_b^S(x, y) &= \sup_{\text{pix}_{p,q} \subseteq S} \Phi_b^{p,q}(x, y). \end{aligned}$$

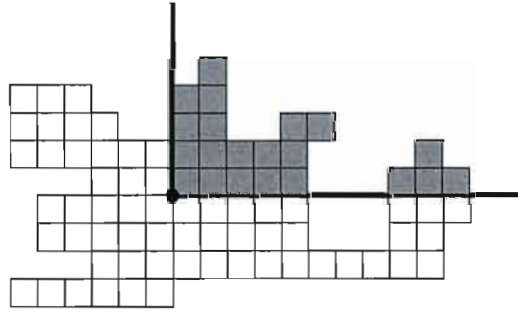
D'autre part, pour calculer le nombre de pixels communs entre  $S$  et  $\mathbf{P}$ ,  $\#(S \cap \mathbf{P})$ , il suffit de remplacer le symbole  $\sup$  dans le dernier algorithme par le symbole  $\sum$  de sommation.

### 2.5.4 Calcul de longueur d'équerre

Considérons le coin nord-est du plan  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  associé à un point  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  d'un treillis donné,

$$\text{NE}_{\alpha, \beta} = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid \alpha \leq x, \beta \leq y\} = [\alpha, \infty) \times [\beta, \infty).$$

Il est facile de vérifier que les algorithmes suivants permettent de calculer, pour un polyomino  $\mathbf{P}$ , le nombre de pixels contenus dans  $\mathbf{P} \cap \text{NE}_{\alpha, \beta}$ . Autrement dit, ceci correspond à calculer le nombre de pixels de  $\mathbf{P}$  se trouvant au nord-est de  $(\alpha, \beta)$  (voir Figure 2.8) :



**Figure 2.8** Il y a 21 pixels appartenant à  $\mathbf{P}$ , se trouvant au nord-est de  $(\alpha, \beta)$ .

*V-algorithme* : (pour la cardinalité de  $\mathbf{P} \cap \text{NE}_{\alpha, \beta}$ )

$$\Phi_a = 0, \quad \Phi_b = (x - \alpha)\chi(x \geq \alpha + 1)\chi(y \geq \beta),$$

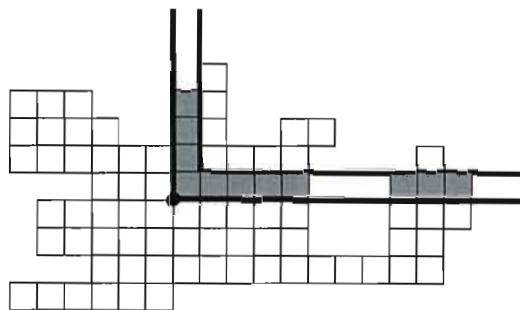
$$\Phi_{\bar{a}} = 0, \quad \Phi_{\bar{b}} = -(x - \alpha)\chi(x \geq \alpha + 1)\chi(y \geq \beta + 1).$$

*H-algorithme* : (pour la cardinalité de  $\mathbf{P} \cap \text{NE}_{\alpha, \beta}$ )

$$\Phi_a = -(y - \beta)\chi(x \geq \alpha)\chi(y \geq \beta + 1), \quad \Phi_b = 0,$$

$$\Phi_{\bar{a}} = (y - \beta)\chi(x \geq \alpha + 1)\chi(y \geq \beta + 1), \quad \Phi_{\bar{b}} = 0.$$

**Définition 9** Soit  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  et  $\mathbf{P}$  un polyomino. La longueur d'équerre de  $(\alpha, \beta) \in \mathbf{P}$ , notée  $\text{equerre}_{\alpha, \beta}(\mathbf{P})$ , est la cardinalité de l'ensemble  $\mathbf{P} \cap \text{Equerre}_{\alpha, \beta}$  où  $\text{Equerre}_{\alpha, \beta} = \text{NE}_{\alpha, \beta} \setminus \text{NE}_{\alpha+1, \beta+1}$ . Autrement dit,  $\text{equerre}_{\alpha, \beta}(\mathbf{P})$  est le nombre de pixels de  $\mathbf{P}$  contenus dans la L-forme  $\text{Equerre}_{\alpha, \beta}$ , étant déterminée par  $(\alpha, \beta)$  (voir Figure 2.9).



**Figure 2.9** Il y a 11 pixels appartenant à  $P$  se trouvant dans  $\text{equerre}_{\alpha,\beta}$ .

Par ailleurs, en remplaçant  $(\alpha, \beta)$  par  $(\alpha + 1, \beta + 1)$  dans les algorithmes précédents, une simple soustraction donne lieu à des algorithmes correspondants pour le calcul des longueurs d'équerre.

*V-algorithme* : (pour la cardinalité de  $P \cap \text{Equerre}_{\alpha,\beta}$ )

$$\Phi_a = 0,$$

$$\Phi_{\bar{a}} = 0,$$

$$\Phi_b = (x - \alpha)\chi(x \geq \alpha + 1)\chi(y \geq \beta) - (x - \alpha - 1)\chi(x \geq \alpha + 2)\chi(y \geq \beta + 1),$$

$$\Phi_{\bar{b}} = -(x - \alpha)\chi(x \geq \alpha + 1)\chi(y \geq \beta + 1) + (x - \alpha - 1)\chi(x \geq \alpha + 2)\chi(y \geq \beta + 2).$$

*H-algorithme* : (pour la cardinalité de  $P \cap \text{Equerre}_{\alpha,\beta}$ )

$$\Phi_b = 0,$$

$$\Phi_{\bar{b}} = 0,$$

$$\Phi_a = -(y - \beta)\chi(x \geq \alpha)\chi(y \geq \beta + 1) + (y - \beta - 1)\chi(x \geq \alpha + 1)\chi(y \geq \beta + 2),$$

$$\Phi_{\bar{a}} = (y - \beta)\chi(x \geq \alpha + 1)\chi(y \geq \beta + 1) - (y - \beta + 1)\chi(x \geq \alpha + 2)\chi(y \geq \beta + 2).$$

### 2.5.5 Calcul de moments d'ordre supérieur

L'approche que nous présentons maintenant pour le calcul des moments d'ordre supérieur est semblable à celle donnée par Yang et Albregtsen dans (Yang et Albregtsen, 1994; Yang et Al-



bregtsen, 1996). Nous faisons cependant appel aux nombres de Stirling plutôt qu'aux nombres de Bernoulli utilisés par Yang et Albreghsten. Notre méthode se décrit comme suit.

Considérons deux entiers  $m, n \geq 0$  et un point  $(u, v) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  aléatoire mais fixé. Par définition, le  $(m, n)$ -moment d'un polyomino  $\mathbf{P}$  relatif au point  $(u, v)$  est donné par l'intégrale

$$\iint_{\mathbf{P}} (x - u)^m (y - v)^n dx dy.$$

Par une simple translation, le calcul de tels moments d'ordre supérieur se réduit au calcul de moments centraux :

$$\iint_{\mathbf{P}} x^m y^n dx dy.$$

Dans ce cas,

$$\begin{aligned} W(x, y) &= \iint_{\text{Pi}_{x,y}} x^m y^n dx dy = \frac{(x+1)^{m+1} - (x)^{m+1}}{m+1} \cdot \frac{(y+1)^{n+1} - (y)^{n+1}}{n+1} \\ &= \frac{1}{(m+1)(n+1)} \Delta_x x^{m+1} \Delta_y y^{n+1}. \end{aligned}$$

Il est de plus bien connu (voir (Comtet, 1974)) que  $t^k = \sum_{v=0}^k S_v^k t^{(v)}$ , où  $S_v^k$  est le nombre de Stirling de deuxième sorte et  $t^{(v)} = t(t-1) \dots (t-v+1)$ . Comme  $\Delta_t t^{(v)} = v t^{(v-1)}$ , il est simple de voir que,

$$W(x, y) = \sum_{0 \leq i \leq m, 0 \leq j \leq n} w_{i,j} x^{(i)} y^{(j)}, \quad w_{i,j} = \frac{(i+1)(j+1)}{(m+1)(n+1)} S_{i+1}^{m+1} S_{j+1}^{n+1}.$$

Pour trouver les solutions  $(U, V)$  des équations aux différences du Corollaire 2, posons

$$U(x, y) = \sum u_{i,j} x^{(i)} y^{(j)}, \quad V(x, y) = \sum v_{i,j} x^{(i)} y^{(j)}.$$

Alors,

$$\Delta_x U - \Delta_x V = \sum ((i+1)u_{i+1,j} - (j+1)v_{i,j+1}) x^{(i)} y^{(j)},$$

et le problème se ramène à résoudre le système linéaire

$$(i+1)u_{i+1,j} - (j+1)v_{i,j+1} = w_{i,j}, \quad i, j \geq 0.$$

Sans aucun doute, divers choix sont possibles pour  $u_{i,j}$ ,  $v_{i,j}$  et une approche semblable peut être utilisée pour d'autres choix des  $w_{i,j}$ .

**Exemple.** Soit  $m = 3, n = 2$ . Alors,

$$\begin{aligned} W(x, y) &= \frac{(x+1)^4 - x^4}{4} \cdot \frac{(y+1)^3 - y^3}{3} \\ &= \frac{4x^3 + 6x^2 + 4x + 1}{4} \cdot \frac{3y^2 + 3y + 1}{3}. \end{aligned}$$

D'autre part, on a,

$$x^3 = x^{(3)} + 3x^{(2)} + x^{(1)}, \quad x^2 = x^{(2)} + x^{(1)}, \quad x = x^{(1)}, \quad y^2 = y^{(2)} + y^{(1)}, \quad y = y^{(1)}.$$

En multipliant on trouve

$$\begin{aligned} W(x, y) &= \frac{4x^{(3)} + 18x^{(2)} + 14x^{(1)} + 1}{4} \cdot \frac{3y^{(2)} + 6y^{(1)} + 1}{3} \\ &= x^{(3)}y^{(2)} + 2x^{(3)}y^{(1)} + \frac{1}{3}x^{(3)} + \frac{9}{2}x^{(2)}y^{(2)} + 9x^{(2)}y^{(1)} + \frac{3}{2}x^{(2)} \\ &\quad + \frac{7}{2}x^{(1)}y^{(2)} + 7x^{(1)}y^{(1)} + \frac{7}{6}x^{(1)} + \frac{1}{4}y^{(2)} + \frac{1}{2}y^{(1)} + \frac{1}{12} \\ &= \dots + w_{i,j}x^{(i)}y^{(j)} + \dots \end{aligned}$$

où  $w_{i,j} = (i+1)u_{i+1,j} - (j+1)v_{i,j+1}$ . Par exemple, si on prend  $v_{i,j} = 0$ , pour tout  $i, j$  alors  $w_{i,j} = (i+1)u_{i+1,j}$ . Donc, on a,  $u_{i+1,j} = \frac{w_{i,j}}{i+1}$  et posons  $u_{0,j} = 0$ . Ainsi on peut trouver les  $u_{i,j}$ . Alors,

$$\begin{aligned} U^0(x, y) &= \sum u_{i,j}x^{(i)}y^{(j)} \\ &= \frac{1}{4}x^{(4)}y^{(2)} + \frac{1}{4}x^{(4)}y^{(1)} + \frac{1}{12}x^{(4)} + \frac{3}{2}x^{(3)}y^{(2)} + 3x^{(3)}y^{(1)} + \frac{1}{3}x^{(3)} \\ &\quad + \frac{7}{2}x^{(2)}y^{(2)} + \frac{7}{2}x^{(2)}y^{(1)} + \frac{7}{12}x^{(2)} + \frac{1}{2}x^{(1)}y^{(1)} + \frac{1}{12}x^{(1)} \\ &= \frac{1}{12}x^{(2)}(x+1)^{(2)}(3y^{(2)} + 3y + 1), \end{aligned}$$

et  $V^0 = 0$ .

Les valeurs correspondantes pour  $\Phi_a, \Phi_b, \Phi_{\bar{a}}, \Phi_{\bar{b}}$ , sont obtenues en utilisant les formules du Corollaire 2 et en posant, par exemple,  $\Omega(x, y) = 0$ .

## 2.5.6 Calcul des familles de projections

Nous donnons maintenant un exemple où le poids de chacun des pixels d'un polyomino est pris dans l'anneau  $\mathbb{A} = \mathbb{R}((q))$  de  $q$ -séries formelles de Laurent finies. Par analogie au *V-algorithme*

donné pour l'aire dans la Table 2.1, considérons l'algorithme associé aux fonctions

$$\langle \Phi_a(x, y) = 0, \quad \Phi_b(x, y) = [x]_q, \quad \Phi_{\bar{a}}(x, y) = 0, \quad \Phi_{\bar{b}}(x, y) = -[x]_q \rangle,$$

où

$$[x]_q = \frac{1 - q^x}{1 - q}, \quad x \in \mathbb{Z},$$

dénote le  $q$ -analogue de  $x$  (le nombre  $x$  lui-même correspond à  $q = 1$ ). Dans ce cas,

$$\Delta_x \Phi_a = [x + 1]_q - [x]_q = \frac{1 - q^{x+1}}{1 - q} - \frac{1 - q^x}{1 - q} = q^x,$$

$$\Delta_y \Phi_a = 0.$$

Donc, selon la Proposition 2, le résultat de cet algorithme appliqué au polyomino  $\mathbf{P}$  est donné par

$$\text{Output}(\bullet, \mathbf{P}) = \sum_{\text{Pix}_{\alpha, \beta} \subseteq \mathbf{P}} \Delta_x \Phi_b(\alpha, \beta) - \Delta_y \Phi_a(\alpha, \beta) = \sum_{\text{Pix}_{\alpha, \beta} \subseteq \mathbf{P}} q^\alpha = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}} v_\alpha(\mathbf{P}) q^\alpha.$$

C'est la série génératrice de Laurent finie de la famille de toutes les projections verticales  $v_\alpha(\mathbf{P})$ ,  $\alpha \in \mathbb{Z}$ , qui peut également être interprétée comme un  $q$ -analogue de l'aire (qui correspond à  $q = 1$ ). On utilise une approche similaire pour la famille des projections horizontales,  $h_\beta(\mathbf{P})$ ,  $\beta \in \mathbb{Z}$ . En factorisant  $(1 - q)$  (resp.  $(1 - t)$ ), le lecteur peut vérifier aisément que :

**Corollaire 3** Soit  $q$  et  $t$  des variables formelles et  $\mathbf{P}$  un polyomino. Alors,

(a) pour le V-algorithme  $\bullet = \langle \Phi_a = 0, \quad \Phi_b = q^x, \quad \Phi_{\bar{a}} = 0, \quad \Phi_{\bar{b}} = -q^x \rangle$ ,

on a,

$$\sum_{\alpha \in \mathbb{Z}} v_\alpha(\mathbf{P}) q^\alpha = -\frac{\text{Output}(\bullet, \mathbf{P})}{1 - q},$$

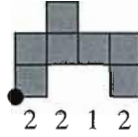
(b) pour le H-algorithme  $\bullet = \langle \Phi_a = t^y, \quad \Phi_b = 0, \quad \Phi_{\bar{a}} = -t^y, \quad \Phi_{\bar{b}} = 0 \rangle$ ,

on a,

$$\sum_{\beta \in \mathbb{Z}} h_\beta(\mathbf{P}) t^\beta = \frac{\text{Output}(\bullet, \mathbf{P})}{1 - t},$$

où  $v_\alpha(\mathbf{P})$ ,  $\alpha \in \mathbb{Z}$ , et  $h_\beta(\mathbf{P})$ ,  $\beta \in \mathbb{Z}$ , dénotent les familles de projections verticales et horizontales du polyomino  $\mathbf{P}$ .

**Exemple.** À l'aide du polyomino de la Figure 2.10, nous illustrons le Corollaire 3. Le calcul utilisant le *V-algorithme* donne,



**Figure 2.10** Famille de projections verticales.

$$\begin{aligned}
 \text{Output}(\bullet, \mathbf{P}) &= 0 + q^{x_1} + 0 + 0 - q^{x_4} + 0 + q^{x_6} + q^{x_7} + 0 + 0 + q^{x_{10}} + 0 - q^{x_{12}} \\
 &\quad + 0 - q^{x_{14}} - q^{x_{15}} \\
 &= q^1 - q^3 + q^4 + q^4 + q^2 - q^1 - q^0 - q^0 \\
 &= -2 + q^2 - q^3 + 2q^4
 \end{aligned}$$

et donc,

$$\sum_{\alpha \in \mathbb{Z}} v_{\alpha}(\mathbf{P})q^{\alpha} = -\frac{\text{Output}(\bullet, \mathbf{P})}{1-q} = -\frac{(-2 + q^2 - q^3 + 2q^4)}{(1-q)} = 2 + 2q + q^2 + 2q^3.$$

On remarque que les coefficients du polynôme obtenu correspondent bien aux projections verticales du polyomino (voir Figure 2.10). Si le polyomino est translaté vers la gauche alors le dernier polynôme se transforme en une série de Laurent de 4 termes.

## 2.6 Autres champs d'exploration

Ces idées suggèrent qu'il est possible de développer une multitude d'autres algorithmes incrémentaux. Mentionnons par exemple, le calcul de projections obliques avec diverses pentes ou de probabilités variées reliées aux polyominos. Les algorithmes décrits dans le Corollaire 3 ou leurs variantes, pourraient éventuellement servir à l'étude de la reconstruction des familles de polyominos à partir de leurs projections (Barucci et al., 1996; Del Lungo et al., 1998; Del Lungo, 1994). Dans la Section 0.2 de l'Appendice A, on présente aussi le résultat d'un petit programme Maple exécutant quelques algorithmes sur un polyomino de périmètre 44.

$$R_\alpha = \bigcup_{p+q=\alpha} \text{Pix}_{p,q} = \{(x, y) \mid [x] + [y] = \alpha\},$$

où  $\lfloor t \rfloor$  désigne la partie entière de  $t$ . La projection oblique d'indice  $\alpha$  d'un polyomino  $\mathbf{P}$  est définie par

$$\text{Diag}_\alpha(\mathbf{P}) = a(\mathbf{P} \cap R_\alpha) = \#(\mathbf{P} \cap R_\alpha).$$

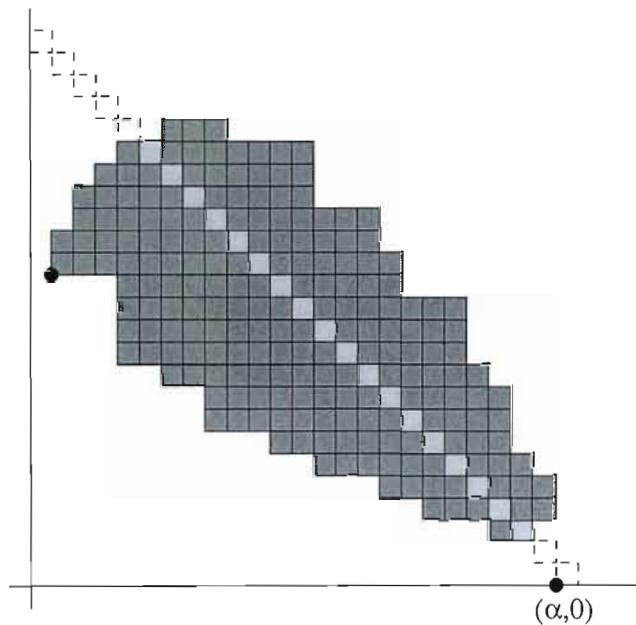


Figure 2.12 Projection oblique d'un polyomino.

**Théorème 2** *Le V-algorithme pour le calcul de  $\text{Diag}_\alpha(\mathbf{P})$  est donné par*

$$\langle \Phi_a = 0, \quad \Phi_b = \chi(x + y > \alpha), \quad \Phi_{\bar{a}} = 0, \quad \Phi_{\bar{b}} = -\chi(x + y - 1 > \alpha) \rangle.$$

**Preuve.** Par la proposition 2, on a

$$\text{Output}(\bullet, \mathbf{P}) = \sum_{\mathbf{P} \ni x_{p,q} \subseteq \mathbf{P}} \Delta_x \Phi_b(p, q) - \Delta_y \Phi_a(p, q). \quad (2.9)$$

On vérifie alors que,

$$\begin{aligned}
 \Delta_x \Phi_b(x, y) &= \chi(x+1+y > \alpha) - \chi(x+y > \alpha) \\
 &= \chi(x+y \geq \alpha) - \chi(x+y > \alpha) \\
 &= \chi(x+y = \alpha)
 \end{aligned}$$

$$\text{et } \Delta_y \Phi_a(x, y) = -\chi(x+y+1-1 > \alpha) + \chi(x+y-1 > \alpha) = 0,$$

d'où

$$\sum_{P \ni x_{p,q} \subseteq P} \Delta_x \Phi_b(p, q) - \Delta_y \Phi_a(p, q) = \sum_{P \ni x_{p,q} \subseteq P} \chi(p+q = \alpha). \blacksquare$$

**Exemple.** Soit le polyomino de la Figure 2.13 codé par le mot  $w = aa\overline{ab}babbb\overline{ba}\overline{ba}\overline{bb}\overline{ab}$ .

Calculons la projection oblique pour  $\alpha = 2$  (seuls les termes non-nuls sont indiqués) :

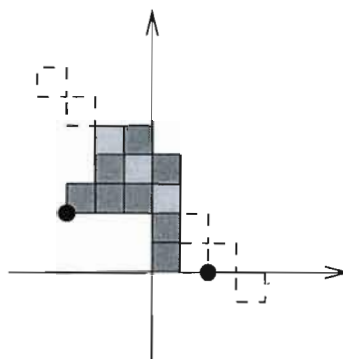


Figure 2.13  $\text{Diag}_2 = 3$

$$\begin{aligned}
 \text{Diag}_2(P) &= \sum_{\leftarrow} 0 + \sum_{\uparrow} \chi(x_i + y_i > 2) + \sum_{\leftarrow} 0 + \sum_{\downarrow} -\chi(x_i + y_i - 1 > 2) \\
 &= \chi(x_3 + y_3 > 2) + \chi(x_4 + y_4 > 2) + \chi(x_6 + y_6 > 2) \\
 &= \chi(1 + 2 > 2) + \chi(1 + 3 > 2) + \chi(0 + 4 > 2) \\
 &= 3.
 \end{aligned}$$





le mot codant le périmètre extérieur de cette composante et

$$v = ab\bar{a}\bar{b},$$

décrivant le trou. De façon analogue à la première composante connexe, on obtient l'aire correspondant à cette seconde composante. Finalement, afin de trouver l'aire totale du polyomino, il suffit d'additionner l'aire respective de chacune des composantes connexes. Écrivant seulement les termes non-nuls, on obtient :

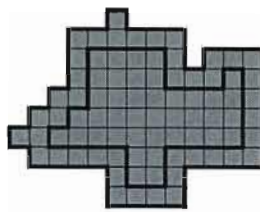
$$\begin{aligned} \alpha(\mathbf{P}) &= \int_w + \int_r - \int_s - \int_t - \int_u - \int_v \\ &= 131 + 9 - 2 - 2 - 28 - 1 \\ &= 107. \end{aligned}$$

## 2.7 Remarques

Le théorème de Green discret s'avère un outil puissant et efficace permettant de fixer dans un cadre général une panoplie d'algorithmes rattachés au calcul de paramètres sur les polyominos. Cette approche est très fertile en résultats nouveaux, et de nombreux problèmes ouverts et conjectures apparaissent de façon naturelle. Mentionnons par exemple certains problèmes soulevés lors d'une communication présentée à Naples, dans le cadre de la conférence internationale DGCI'03 (19–21 novembre 2003, Naples, Italie) (Brlek, Labelle et Lacasse, 2003) :

- [ Christophe Fiorio ] décider, de façon efficace, si un polyomino  $\mathbf{P}_1$  est inclus dans un polyomino  $\mathbf{P}_2$ . On notera que  $\mathbf{P}_1 \subseteq \mathbf{P}_2$  si et seulement si  $\#(\mathbf{P}_1 \cap \mathbf{P}_2) = \#(\mathbf{P}_1)$ . Ainsi, une solution plus raffinée à celle proposée dans les Sections 3.2 et 3.3 serait envisageable.
- [ Christophe Fiorio ] étant donné deux polyominos,  $\mathbf{P}_1$  et  $\mathbf{P}_2$ , déterminer le nombre maximal de pixels contenus dans l'intersection de  $\mathbf{P}_1$  et un translaté de  $\mathbf{P}_2$  ;
- [ Cero d'Elia ] déterminer le polyomino maximal  $\mathbf{P}'$  strictement inclus dans un polyomino donné  $\mathbf{P}$  de telle sorte que les contours de  $\mathbf{P}$  et  $\mathbf{P}'$  soient disjoints ;
- [ Jean-Marc Chassery ] décider si un point quelconque du plan,  $(x, y)$ , est contenu dans l'enveloppe convexe d'un polyomino  $\mathbf{P}$ .

Une version beaucoup plus étendue a été publiée dans les deux revues *Discrete Applied Mathematics* (Brlek, Labelle et Lacasse, 2005b) et *Theoretical Computer Science* (Brlek, Labelle et Lacasse, 2005a).

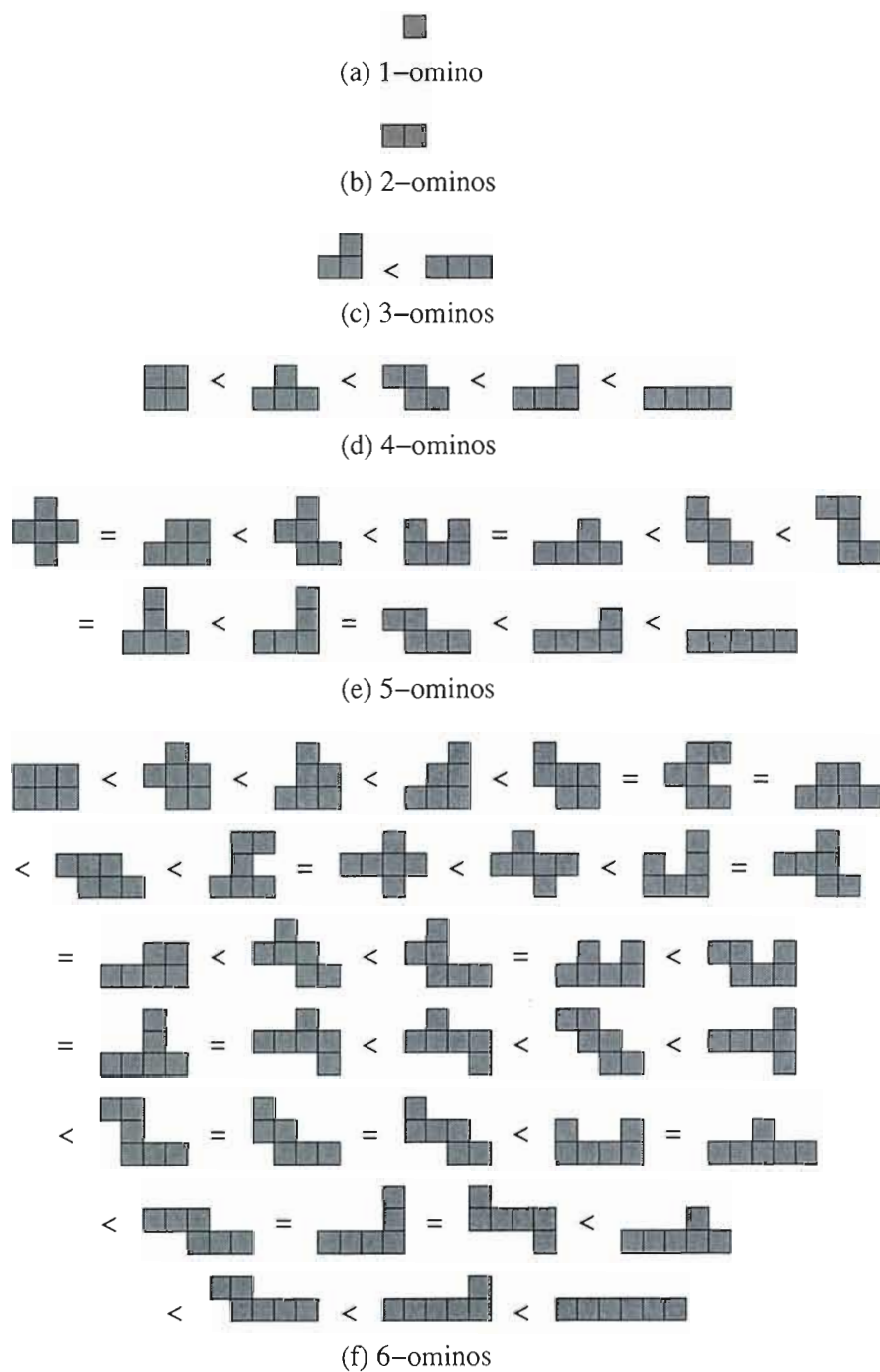


On notera également que la complexité des algorithmes décrits dans le Chapitre 2, à la fois en fonction du temps et de l'espace, est linéaire selon la longueur du contour du polyomino. En effet, les codes de Freeman associés à un polyomino correspondent à leur périmètre, dont la taille détermine le nombre d'itérations dans un algorithme incrémental. Cependant, la mise en oeuvre optimale des formules décrites dans ce travail requiert une analyse un peu plus poussée. En effet, l'implémentation (naïve) s'obtient de façon relativement simple mais, pour plus d'efficacité, des structures de données adéquates s'avèrent nécessaires pour chacun des algorithmes. Par exemple, le calcul de la cardinalité de l'intersection de deux polyominos peut s'optimiser en calculant d'abord les paires assorties. En effet, les paires assorties reposent sur un algorithme de tri, étant plus efficace si les coordonnées sont ordonnées. Une description plus détaillée de cette implémentation mériterait assurément une attention particulière.

Le lecteur attentif aura sans doute remarqué que les algorithmes décrits s'adaptent de façon assez immédiate à des objets plus généraux : régions délimitées par des chemins polygonaux fermés (avec ou sans trous) sur d'autres types de réseaux tels que triangulaires ou hexagonaux. Pour ce qui est des polyominos en dimension supérieure, une version discrète du théorème de Stokes sera proposée au Chapitre 6 et permettra ainsi d'étendre nos résultats.

Cependant, avant d'en arriver là, un autre problème nous intéressera. Comme les polyominos sont facilement codables par des mots de quatre lettres, nous pouvons, à l'aide d'une machine et d'algorithmes appropriés, les classer selon certaines valeurs associées à divers paramètres. Par exemple, étant donné un entier  $n$ , on peut classer, de façon (faiblement) croissante, les polyominos de taille  $n$  ( $n$ -ominos) selon leur moment d'inertie. Si deux  $n$ -ominos  $\mathbf{P}$  et  $\mathbf{Q}$  satisfont  $I(\mathbf{P}) < I(\mathbf{Q})$ , alors on dit que  $\mathbf{P}$  est plus rond que  $\mathbf{Q}$ . Une telle classification est donnée dans la Figure 2.15 pour les petits  $n$ -ominos,  $n \leq 5$  (le plus rond au début). Deux  $n$ -ominos distincts peuvent très bien avoir des rondeurs égales. En particulier, le  $n$ -omino de

rondeur maximale n'est pas nécessairement unique (voir  $n = 5$ ). Le prochain chapitre sera donc consacré à l'étude de ces ensembles d'inertie minimale.



**Figure 2.15** Polyominoes d'aire donnée classifiés selon l'ordre décroissant de rondeurs.

## Chapitre III

### ENSEMBLES DISCRETS D'INERTIE MINIMALE

Dans ce chapitre, le contexte est étendu au cas plus général des ensembles discrets. Nous proposons une description géométrique explicite comme fonction de  $N$  de la rondeur des ensembles discrets de taille  $N$ . Selon les valeurs associées à divers paramètres décrivant ces ensembles, plusieurs classifications sont possibles. L'emphase est mise ici sur l'analyse du moment d'inertie  $I(S)$ , des ensembles discrets  $S$ , relatif au centre de gravité, qui s'interprète comme une mesure de la difficulté à tourner une figure plane autour d'un axe passant par le centre de gravité de  $S$  et perpendiculaire au plan. Plus spécifiquement, nous classifions ces ensembles selon leurs rondeurs : pour une taille  $N$  donnée, si deux ensembles  $S$  et  $T$  satisfont  $I(S) < I(T)$ , alors on dit que  $S$  est plus rond que  $T$ . Plus précisément, il s'agit de développer un algorithme pour calculer, pour chaque  $N$ , quel est le ou les ensembles discrets de moment d'inertie minimal.

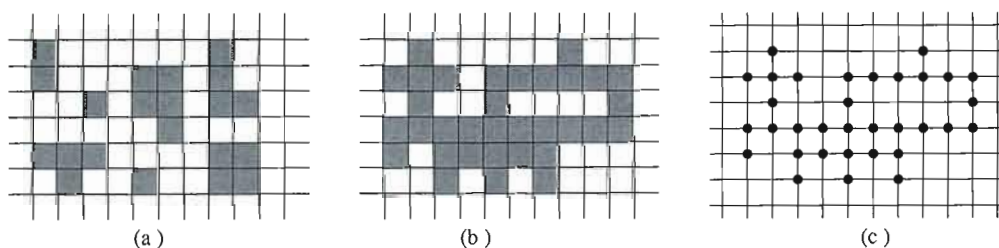
Les résultats obtenus ont été présentés lors de la conférence internationale DGCI'08 (Brlek, Labelle et Lacasse, 2008b) alors que la version étendue (Brlek, Labelle et Lacasse, 2008a) fait l'objet de ce présent chapitre.

Précisons que la notion de rondeur considérée ici est distincte de celle donnée dans (Altschuler et al., 2006), où l'on veut minimiser le *périmètre de site* d'un polyomino du réseau carré, qui consiste en le nombre de points situés à une distance *Manhattan* 1 du polyomino dans le réseau carré. L'équation (3.2) nous assure que, pour une taille donnée, minimiser  $I(S)$  est équivalent à minimiser  $I(A)$  où  $A$  est l'ensemble des centres des pixels de  $S$ . Par la suite, pour simplifier les notations et les calculs, le plan  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  est identifié par le plan complexe  $\mathbb{C}$  et  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  par  $\mathbb{Z} + i\mathbb{Z}$ .

Le chapitre est organisé comme suit. D'abord, dans les Sections 3.1 et 3.2, nous fixons la terminologie et rappelons certaines notions de base sur les moments d'inertie d'ensembles discrets. La Section 3.3 est, pour sa part, dédiée à l'étude des propriétés reliées à ces ensembles discrets d'inertie minimale. Plus précisément, nous introduisons la notion de *quasi-disque discret* et prouvons que les ensembles discrets d'inertie minimale sont des animaux qui sont des quasi-disques. Une méthode permettant de calculer ces ensembles pour une taille donnée ainsi que certains paramètres associés est décrite à la Section 3.4.

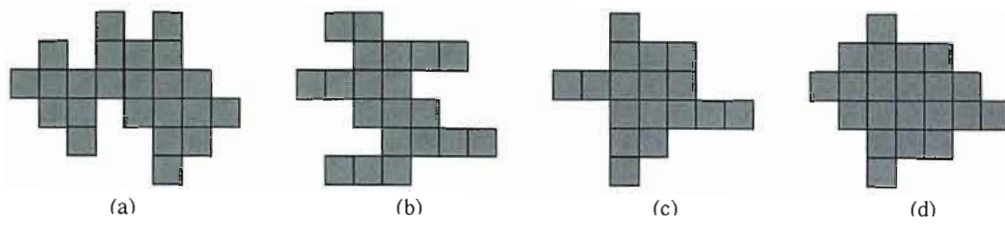
### 3.1 Terminologie

Par *ensemble discret*, on entend un ensemble fini de points du réseau  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  ou une réunion finie de carrés unitaires (*pixels*) (voir Figure 3.1 (a)). Le terme polyomino se rapporte à la définition vue au Chapitre 1 (voir Figure 3.1 (b)), à la seule différence que dans le cas présent les polyominos ne sont pas simplement connexes (les trous sont acceptés). Le *dual* d'un ensemble de pixels consiste à remplacer chacune des cellules du réseau carré par son centre. En particulier, le dual d'un polyomino est habituellement appelé un *animal* (voir Figure 3.1 (c)). Par une translation de  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ , l'animal peut toujours s'interpréter comme un sous-ensemble du plan discret  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ . Notons que les animaux, au même titre que les polyominos, sont des objets combinatoires dont l'étude a mené à une abondance de résultats. Entre autre, le terme animal semble être dû à Read (Read, 1962).



**Figure 3.1** (a) Un ensemble discret (b) un polyomino typique et (c) son animal correspondant.

Un polyomino, comme on l'a déjà remarqué, peut se caractériser par des contraintes de convexité telles que définies au Chapitre 1 (voir Figure 3.2 (a),(b),(c)).



**Figure 3.2** Un polyomino (a)  $v$ -convexe (b)  $h$ -convexe (c)  $hv$ -convexe (d) fortement-convexe.

Nous introduisons maintenant une autre notion de convexité. Un polyomino est dit *fortement-convexe* (voir Figure 3.2 (d)), si pour toute paire de points  $u$  et  $v$  de son animal correspondant, tous les points à coordonnées entières contenus dans le segment  $[u, v]$  sont des points de l'animal.

Sous l'hypothèse de la 8-connexité, qui est une notion plus générale que la 4-connexité, étant donné qu'elle permet de traverser les pixels par les coins, cette définition est équivalente à une des caractérisations des ensembles discrets convexes proposée par Kim (Kim, 1981; Kim, 1982), qui s'énonce comme suit :

- *Propriété de lignes.* Il n'existe pas trois points colinéaires  $u_1, u_2, u_3 \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  tels que  $u_1$  et  $u_3$  appartiennent à  $S$ ,  $u_2$  est situé entre  $u_1$  et  $u_3$  mais  $u_2 \notin S$ .

De plus, Kim (Kim, 1981; Kim, 1982) a démontré, toujours sous l'hypothèse de la 8-connexité, que cette propriété de lignes correspond à la notion de convexité discrète introduite par Minsky et Papert (Minsky et Papert, 1969), appelée la MP-convexité :

- Soit  $S$  un sous-ensemble dans  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ . On dit que  $S$  est digitalement convexe s'il correspond à la discrétisation de Gauss d'un sous-ensemble convexe  $R \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ . C'est-à-dire,  $S = \text{Conv}(R) \cap \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ , où  $\text{Conv}(R)$  est l'enveloppe convexe de  $R$  au sens euclidien.

Dans le cas des polyominos 4-connexes, qui font l'objet de notre étude, comme la 4-connexité est une notion plus contraignante que la 8-connexité, on peut donc conclure que notre définition de forte-convexité coïncide bien avec celle de Minsky et Papert.

### 3.2 Moment d'inertie continu et discret

Rappelons pour commencer, quelques définitions élémentaires sur certains paramètres géométriques reliés aux ensembles discrets.

**Définition 10** Soit  $S$  un sous-ensemble mesurable du plan complexe tel que

$$\int \int_S |z|^2 dx dy < \infty. \quad (3.1)$$

Le centre de gravité  $g$  et le moment d'inertie  $I$  relatif au centre de gravité, associés à  $S$  sont définis par les équations suivantes :

$$g = g(S) = \frac{1}{a(S)} \int \int_S z dx dy$$

et

$$I = I(S) = \int \int_S |z - g|^2 dx dy = \int \int_S |z|^2 dx dy - \frac{1}{a(S)} \left| \int \int_S z dx dy \right|^2,$$

où

$$a(S) = \int \int_S dx dy.$$

En particulier, si  $S = p_1 \cup p_2 \cup \dots \cup p_N$  est une réunion de  $N$  pixels distincts, la condition  $\int \int_{p_1 \cup p_2 \cup \dots \cup p_N} |z|^2 dx dy < \infty$  est clairement satisfaite et  $g(S)$  et  $I(S)$  sont bien définis.

Notons également que le moment d'inertie associé à un pixel unitaire  $p$  est

$$I(p) = \frac{1}{6}$$

et que son centre de gravité correspond à son centre géométrique.

**Définition 11** Soit  $T = \{z_1, \dots, z_N\} \subseteq \mathbb{C}$  un ensemble de  $N$  points distincts dans le plan complexe où les points  $z_k$  sont respectivement de masses positives non nulles  $m_k$  pour  $k = 1, \dots, N$ . Le centre de gravité  $g$  et le moment d'inertie  $I$  relatif au centre de gravité, associés à  $T$  sont définis par les équations suivantes :

$$g = g(T) = \frac{1}{m_1 + \dots + m_N} \sum_{k=1}^N m_k z_k,$$



et

$$\begin{aligned} I = I(T) &= \sum_{k=1}^N m_k |z_k - g|^2 = \sum_{k=1}^N m_k |z_k|^2 - \frac{1}{m_1 + \dots + m_N} \left| \sum_{k=1}^N m_k z_k \right|^2 \\ &= \frac{1}{m_1 + \dots + m_N} \sum_{k < l} m_k m_l |z_k - z_l|^2. \end{aligned}$$

L'équivalence précédente est obtenue comme suit :

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^N m_k |z_k|^2 - \frac{1}{m_1 + \dots + m_N} \left| \sum_{k=1}^N m_k z_k \right|^2 \\ &= \frac{\left( \sum_{k=1}^N m_k |z_k|^2 \right) \left( \sum_{l=1}^N m_l \right) - \left( \sum_{k=1}^N m_k z_k \right) \left( \sum_{l=1}^N m_l \bar{z}_l \right)}{m_1 + \dots + m_N} \\ &= \frac{\sum_{k < l} m_k m_l (|z_k|^2 + |z_l|^2 - z_k \bar{z}_l - \bar{z}_k z_l)}{m_1 + \dots + m_N} \\ &= \frac{\sum_{k < l} m_k m_l |z_k - z_l|^2}{m_1 + \dots + m_N}. \end{aligned}$$

Les deux relations ci-dessous, présentées sous forme de lemme, sont aisément vérifiables et s'appliquent à tous les ensembles discrets.

**Lemme 3** Soit  $S = p_1 \cup \dots \cup p_N$  une réunion de  $N$  pixels distincts  $p_1, \dots, p_N$  et  $A$  le dual de  $S$  où  $N = |A|$ . Alors,

$$I(S) = I(A) + \frac{N}{6}. \quad (3.2)$$

La prochaine formule permet de calculer de façon directe le moment d'inertie d'un ensemble de  $n$  points alignés équidistants. Elle sera d'ailleurs utile dans la Section 3.4, afin de calculer les moments d'inertie minimaux des ensembles discrets dits *ronds*.

**Lemme 4** Soit  $S$  un ensemble de  $n$  points alignés équidistants, possédant chacun une masse unitaire. Alors,

$$I(S) = \frac{n^3 - n}{12} d^2 \quad (3.3)$$

où  $d$  représente la distance entre les points successifs.

### 3.3 Propriétés des ensembles discrets d'inertie minimale

À partir de maintenant, nous allons considérer que tous les sous-ensembles mesurables (ou finis) dans  $\mathbb{C}$  satisfont la condition (3.1). Le lemme qui vient généralise la formule (3.2) et s'avère très utile dans le présent contexte. Il découle du théorème classique des *axes parallèles* (Feynman, Leighton et Sands, 1963) qui s'énonce comme suit : pour tout point  $w$  et tout ensemble mesurable (ou fini)  $S$ , le moment d'inertie de  $S$ , relatif au point  $w$ , est dénoté  $I_w(S)$  et est défini par

$$I_w(S) = \int \int_S |z - w|^2 dx dy \quad (\text{ou} \quad \sum_{k=1}^N m_k |z_k - w|^2),$$

satisfaisant

$$I_w(S) = I(S) + m|w - g|^2, \quad (3.4)$$

où  $g = g(S)$  et  $m$  est la masse de  $S$ .

**Lemme 5** *Considérons  $S_1, \dots, S_N$  une suite de  $N$  sous-ensembles mesurables (ou finis) dis-joints dans  $\mathbb{C}$ . Alors,*

$$\begin{aligned} I(S_1 \cup \dots \cup S_N) &= \sum_{k=1}^N I(S_k) + I(\{g_1, \dots, g_N\}) \\ &= \sum_{k=1}^N I(S_k) + \sum_{k=1}^N m_k |g_k|^2 - \frac{1}{m} \left| \sum_{k=1}^N m_k g_k \right|^2 \\ &= \sum_{k=1}^N I(S_k) + \frac{1}{m} \sum_{k < l} m_k m_l |g_k - g_l|^2, \end{aligned}$$

où  $g_k$  correspond au centre de gravité de  $S_k$  de masse  $m_k = \int \int_{S_k} dx dy$  (ou  $m_k = |S_k|$ ) et  $m = m_1 + \dots + m_N$ .

**Preuve.** Par (3.4), pour tout  $w \in \mathbb{C}$ , on peut écrire

$$I_w(S_k) = I(S_k) + m_k |w - g_k|^2, \quad k = 1, \dots, N.$$

De plus, par la propriété d'additivité de  $I_w$ , on a

$$\begin{aligned} I_w(S_1 \cup \dots \cup S_N) &= I_w(S_1) + \dots + I_w(S_N) \\ &= I(S_1) + \dots + I(S_N) + m_1 |w - g_1|^2 + \dots + m_N |w - g_N|^2. \end{aligned}$$

En prenant  $w = g(S_1 \cup \dots \cup S_N) = (m_1 g_1 + \dots + m_N g_N) / (m_1 + \dots + m_N)$ ,

on obtient,

$$\begin{aligned} I(S_1 \cup \dots \cup S_N) &= I_g(S_1 \cup \dots \cup S_N) \\ &= I(S_1) + \dots + I(S_N) + m_1 |g - g_1|^2 + \dots + m_N |g - g_N|^2 \\ &= I(S_1) + \dots + I(S_N) + I(\{g_1, \dots, g_N\}) . \blacksquare \end{aligned}$$

Une démonstration alternative du Lemme 5 n'exploitant pas le théorème des axes parallèles est disponible dans la Section 0.1 de l'annexe B.

Notons que la formule (3.2) se rapporte au cas particulier où  $S_1 = p_1, \dots, S_N = p_N$  avec  $g_1 = g(p_1), \dots, g_N = g(p_N)$ . Plus précisément,

$$I(S) = I(p_1 \cup p_2 \cup \dots \cup p_N) = \sum_{k=1}^N I(p_k) + I(\{g_1, \dots, g_N\}) = \frac{N}{6} + I(A),$$

puisque  $I(p_k) = \frac{1}{6}$  et  $A$  constitue l'ensemble des centres de gravité des pixels de  $S$ .

### 3.3.1 Forte-convexité des ensembles discrets d'inertie minimale

Afin d'analyser les propriétés de convexité se rapportant aux ensembles discrets d'inertie minimale, certains lemmes sont nécessaires.

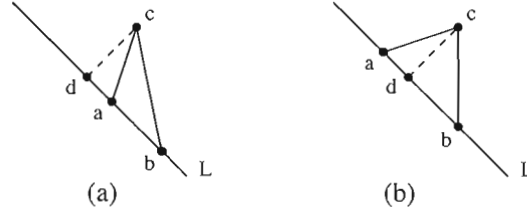
**Lemme 6** *Considérons une droite  $L$  fixée dans le plan complexe et  $c \notin L$  un point quelconque de masse  $p$ . Soit  $d$  le point de  $L$  le plus rapproché de  $c$ , c'est-à-dire  $[c, d] \perp L$ . Prenons deux points distincts,  $a$  et  $b$  appartenant à  $L$ , de masses respectives  $m$  et  $n$ . Considérons les deux cas suivants :*

Cas 1. *Si  $a$  et  $b$  sont du même côté de  $d$  sur la droite  $L$  et*

$$0 \leq |a - d| < |b - d|,$$

*alors le moment d'inertie,  $I(\{a, b, c\})$  est strictement décroissant lorsque  $b$  est translaté vers  $a$  le long de la droite  $L$  (voir Figure 3.3 (a)).*

Case 2. *Si  $a$  et  $b$  sont de côtés différents de  $d$  sur la droite  $L$ , alors lorsque  $a$  ou  $b$  est translaté vers  $d$  le long de la droite  $L$ , le moment d'inertie  $I(\{a, b, c\})$  décroît strictement (voir Figure 3.3 (b)).*



**Figure 3.3** (a) Cas 1 et (b) Cas 2 du Lemme 6.

**Preuve.** Par le Lemme 5, avec  $N = 3$ ,  $S_1 = \{a\}$ ,  $S_2 = \{b\}$ ,  $S_3 = \{c\}$  de masse  $m$ ,  $n$  et  $p$  respectivement, on a,

$$I = I(\{a, b, c\}) = \frac{1}{m + n + p} (mn|a - b|^2 + np|b - c|^2 + pm|c - a|^2),$$

puisque  $I(\{a\}) = I(\{b\}) = I(\{c\}) = 0$ .

Dans le cas 1, lorsque  $b$  se déplace vers  $a$ , les valeurs de  $|a - b|$  et  $|b - c|$  diminuent alors que celle de  $|c - a|$  reste inchangée. Ceci implique que le moment d'inertie diminue. Dans le cas 2, si  $a$  se déplace vers  $d$ , alors les valeurs de  $|a - b|$  et  $|c - a|$  diminuent tandis que  $|b - c|$  reste fixe. D'où le moment d'inertie diminue. Un argument similaire est utilisé pour le cas où  $b$  est déplacé vers  $d$ . ■

**Théorème 3** *Considérons  $N \geq 1$  et  $S \subseteq \mathbb{C}$  une réunion de  $N$  pixels (ou  $N$  points) distincts du réseau  $\mathbb{Z} + i\mathbb{Z}$ , tous de masse unitaire. Si le moment d'inertie de  $S$  est minimal, alors  $S$  est un ensemble fortement-convexe.*

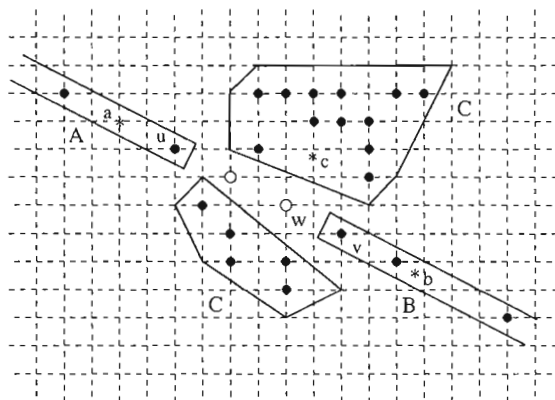
**Preuve.** Pour  $N = 1$ , le résultat est trivial. Par le Lemme 3, il suffit de considérer le cas où  $S$  contient  $N \geq 2$  points du réseau  $\mathbb{Z} + i\mathbb{Z}$ . Par la Définition 11,  $I(S)$  est un nombre strictement positif. Supposons que  $I(S)$  est minimal et que  $S$  n'est pas fortement-convexe. Alors,  $\exists u, v \in S$  tel que le segment  $[u, v]$  contienne un point (trou)  $w \in \mathbb{Z} + i\mathbb{Z}$  tel que  $w \notin S$ . Soit les ensembles

$$A = \{z \in S : \exists t \in \mathbb{Q}, z = u + t(v - u), t \leq 0\}$$

$$B = \{z \in S : \exists t \in \mathbb{Q}, z = u + t(v - u), t \geq 1\}$$

$$C = S \setminus (A \cup B)$$

où  $a = g(A)$ ,  $b = g(B)$ ,  $c = g(C)$  (voir Figure 3.4).



**Figure 3.4** Élimination des trous

Alors par les lemmes 5 et 6 (voir Figure 3.4), on peut translater  $A$  (ou  $B$ ) vers  $w$  afin d'obtenir un ensemble  $A'$  (ou  $B'$ ) tel que l'ensemble

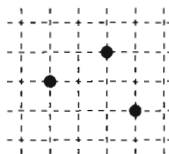
$$S' = A' \cup B \cup C \quad (\text{ou } S' = A \cup B' \cup C)$$

possède un plus petit moment d'inertie

$$I(S') < I(S)$$

et tel que  $|S'| = |S| = N$  et  $w \in S'$ . Comme l'ensemble initial  $S$  est d'inertie minimale, on arrive à une contradiction, d'où  $S$  est un ensemble fortement-convexe. ■

Notons que notre définition de forte-convexité n'implique pas nécessairement la 4-connexité (voir Figure 3.5), ce qui nous empêche, dans la preuve ci-dessus, de conclure que les ensembles discrets d'inertie minimale sont des polyominos. À cet effet, nous introduisons la notion de *quasi-disque*.



**Figure 3.5** Fortement-convexe  $\nRightarrow$  animal 4-connexe.

### 3.3.2 Quasi-disques et ensembles discrets ronds

Nous montrons maintenant que la description des ensembles discrets d'inertie minimale se rapproche étroitement de celle des disques dans le sens suivant :

**Définition 12** *Considérons  $c \in \mathbb{C}$  et  $S$  un ensemble fini de points du réseau  $\mathbb{Z} + i\mathbb{Z}$ . On dit alors que  $S$  est*

(i) *un disque (discret) de rayon  $r$  centré en  $c$  si*

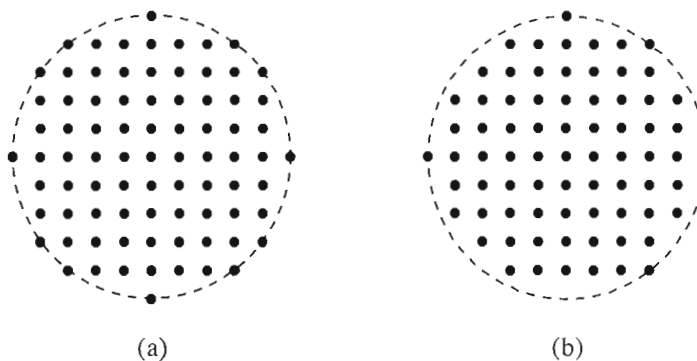
$$S = \{z : |z - c| \leq r\} \cap (\mathbb{Z} + i\mathbb{Z}),$$

(ii) *un quasi-disque (discret) de rayon  $r$  centré en  $c$  si*

$$\{z : |z - c| < r\} \cap (\mathbb{Z} + i\mathbb{Z}) \subseteq S \subseteq \{z : |z - c| \leq r\} \cap (\mathbb{Z} + i\mathbb{Z}),$$

où  $r = \max_{s \in S} |s - c|$ .

La Figure 3.6 (a) et (b) illustre respectivement un disque et un quasi-disque de rayon  $r = 5$ .



**Figure 3.6** (a) Un disque (discret) (b) un quasi-disque (discret).

Remarquons que chaque point du réseau se situant sur la circonférence d'un disque discret doit appartenir à celui-ci, alors que pour un quasi-disque, seulement au moins un des points du réseau doit être sur la circonférence. Notons que l'existence d'un tel point est toujours satisfaite par la définition même du rayon  $r$ . Cependant, dans les deux cas, tous les points à coordonnées entières contenus à l'intérieur de la circonférence doivent appartenir à la fois au disque et au quasi-disque.

**Lemme 7** Soit  $A$  un quasi-disque de cardinalité  $N$ . Alors,

- (i)  $A$  est fortement-convexe,
- (ii) si  $N \neq 2$ , alors  $A$  est un animal.

**Preuve.** (i) Soit  $A$  un quasi-disque de rayon  $r$  centré en  $c$ . Étant donné deux points  $u, v \in A$ , alors tout point  $w$  du réseau,  $w \neq u$ ,  $w \neq v$ , appartenant au segment  $[u, v]$ , est nécessairement dans l'intérieur du disque  $\{z : |z - c| \leq r\}$ . Donc, par la Définition 12,  $w \in A$ .

(ii) Soit  $A$  un quasi-disque de rayon  $r$  centré en  $c \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ , avec  $N \geq 3$ . Soit  $u, v \in A$ , deux points distincts du réseau. On doit montrer qu'il existe un chemin  $\gamma$  reliant  $u$  à  $v$ , composé uniquement de déplacements verticaux et horizontaux unitaires.

Si  $u$  et  $v$  sont alignés sur un même segment vertical ou horizontal, alors par (i), on peut prendre  $\gamma$  comme le chemin linéaire reliant  $u$  à  $v$ .

Autrement,  $u$  et  $v$  ne sont pas alignés verticalement ou horizontalement. Dans ce cas, on considère le rectangle  $\mathcal{R}$  dont les sommets  $u, v', v, u'$ , sont donnés par

$$u = (u_1, u_2), \quad v' = (v_1, u_2), \quad v = (v_1, v_2), \quad u' = (u_1, v_2).$$

Afin d'analyser toutes les configurations possibles, notons que

$$2r^2 \geq |u - c|^2 + |v - c|^2 = |u' - c|^2 + |v' - c|^2. \quad (3.5)$$

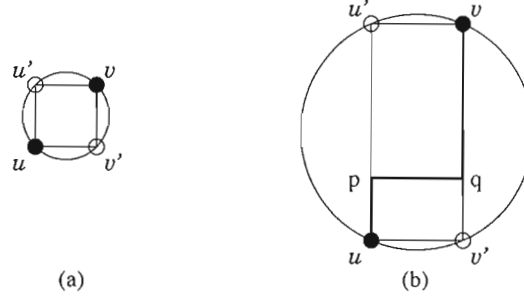
Considérons d'abord le cas où au moins un des deux points du réseau  $u', v'$  qu'on va appeler  $t \in \{u', v'\}$ , appartient à  $A$ . Par (i), comme  $A$  est un quasi-disque, on peut toujours choisir un chemin  $\gamma$  allant de  $u$  vers  $v$ , c'est-à-dire  $([u, t] \cup [t, v]) \cap \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ , décrivant une  $L$ -forme.

En tenant compte de (3.5), la seule autre possibilité à analyser est que les deux points  $u', v' \notin A$ . Dans ce cas,  $u'$  et  $v'$  se trouvent simultanément sur la circonférence  $|z - c| = r$ . Autrement dit,

$$|u' - c|^2 = |v' - c|^2 = r^2.$$

Ceci implique que  $|z - c| = r$  est le cercle circonscrit du rectangle  $\mathcal{R}$  ayant les sommets  $u \in A$ ,  $v' \notin A$ ,  $v \in A$ ,  $u' \notin A$ . Dans ce cas, puisque  $N \geq 3$ ,  $\mathcal{R}$  ne peut se réduire à un carré unité (voir

Figure 3.7 (a)). Le rectangle  $\mathcal{R}$  est donc de dimension  $m \times n$ , avec  $m > 1$  ou  $n > 1$ , et il existe assurément un chemin  $\gamma$  allant de  $u$  à  $v$  formés exclusivement de pas verticaux et horizontaux unitaires (voir Figure 3.7 (b)). ■



**Figure 3.7** Chemins possibles lorsque  $u', v' \notin A$  et  $u', v'$  sont sur la circonférence.

**Théorème 4** Soit  $S$  un ensemble discret de  $N$  pixels d'inertie minimale. Alors,  $S$  est un polyomino dont l'animal associé  $\mathbf{A}$  est un quasi-disque centré en son centre de gravité  $g = g(\mathbf{A})$  de rayon  $r = \max_{a \in \mathbf{A}} |a - g|$ .

**Preuve.** Soit  $A$  le dual d'un ensemble discret  $S$  d'inertie minimale. Comme le résultat est vrai pour  $N \leq 2$ , on va supposer que  $N \geq 3$ . Prenons  $a_0 \in A$  tel que

$$r = |a_0 - g| = \max_{a \in A} |a - g|,$$

et considérons le disque fermé

$$\Gamma_{a_0} = \{z \in \mathbb{C} : |z - g_{a_0}| \leq |a_0 - g_{a_0}|\}, \quad g_{a_0} = g(A \setminus \{a_0\}).$$

Montrons d'abord que tous les points discrets dans l'intérieur du disque  $\Gamma_{a_0}$  sont dans  $A$ . Ceci est une conséquence du Lemme 5 lorsque  $N = 2$  :

$$I(S_1 \cup S_2) = I(S_1) + I(S_2) + \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} |g_1 - g_2|^2.$$

En effet, prenons  $S_1 = \{a_0\}$ ,  $S_2 = A \setminus \{a_0\}$ ,  $g_1 = a_0$ ,  $g_2 = g_{a_0}$ ,  $m_1 = 1$ ,  $m_2 = N - 1$ .

Alors,

$$I(A) = I(\{a_0\}) + I(A \setminus \{a_0\}) + \frac{N-1}{N} |a_0 - g_{a_0}|^2 = I(A \setminus \{a_0\}) + \frac{N-1}{N} |a_0 - g_{a_0}|^2,$$

comme  $I(\{a_0\}) = 0$ .



Supposons maintenant qu'il existe un point entier  $b \notin A$  contenu dans l'intérieur de  $\Gamma_{a_0}$ , c'est-à-dire,  $|b - g_{a_0}| < |a_0 - g_{a_0}|$ . Remplaçons  $a_0$  par  $b$  et considérons l'ensemble  $B = ((A \setminus \{a_0\}) \cup \{b\})$ . En conséquence,

$$I(B) = I((A \setminus \{a_0\}) \cup \{b\}) = I(A \setminus \{a_0\}) + \frac{N-1}{N}|b - g_{a_0}|^2 < I(A),$$

ce qui contredit la minimalité du moment d'inertie de l'ensemble  $A$ .

Considérons maintenant le disque fermé

$$C_{a_0} = \{z \in \mathbb{C} : |z - g| \leq r\}.$$

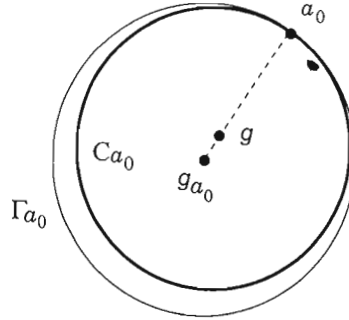
Par la définition de  $C_{a_0}$ , on a forcément

$$A \subseteq C_{a_0} \cap (\mathbb{Z} + i\mathbb{Z}). \quad (3.6)$$

De plus, il est simple de vérifier que

$$g - a_0 = \frac{N-1}{N}(g_{a_0} - a_0).$$

Cette dernière égalité entraîne que  $g$  appartient au segment  $[g_{a_0}, a_0]$ . D'où,  $C_{a_0} \subseteq \Gamma_{a_0}$  comme on observe à la Figure 3.8.



**Figure 3.8** Les disques  $\Gamma_{a_0}$  et  $C_{a_0}$  (en gras).

On a déjà vu que tous les points entiers contenus dans l'intérieur de  $\Gamma_{a_0}$  sont des points de  $A$ . En particulier, tous ceux appartenant à l'intérieur du disque  $C_{a_0}$  sont donc nécessairement aussi des éléments de  $A$  :

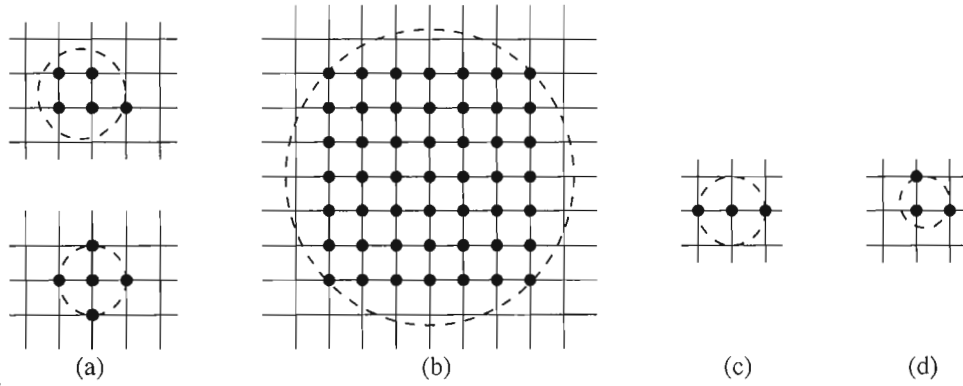
$$(\text{int } C_{a_0}) \cap (\mathbb{Z} + i\mathbb{Z}) \subseteq A.$$

En utilisant cette dernière inclusion et (3.6), on obtient

$$(\text{int } C_{a_0}) \cap (\mathbb{Z} + i\mathbb{Z}) \subseteq A \subseteq C_{a_0} \cap (\mathbb{Z} + i\mathbb{Z}),$$

ce qui implique que  $A$  est un quasi-disque de rayon  $r$ , centré en  $g$ . Finalement, par le Lemme 7, puisque  $A$  est un quasi-disque de  $N \geq 3$  points, alors  $A$  est un animal fortement-convexe. ■

La Figure 3.9 (a) illustre le Théorème 4 pour  $N = 5$ . Par la contraposée, l'ensemble des 49 points de la Figure 3.9 (b) n'est pas minimal puisque la circonférence (en pointillée) contient des points à coordonnées entières qui ne sont pas dans l'ensemble. On observe aussi que la réciproque n'est pas vérifiée. En effet, pour  $N = 3$ , le quasi-disque de la Figure 3.9 (c) n'est pas minimal (avec  $I = 2$ ). Le plus rond pour  $N = 3$ , est représenté à la Figure 3.9 (d) (avec  $I = \frac{4}{3} < 2$ ).



**Figure 3.9** Illustration (a) du Théorème 4 (b) sa contraposée et (c), (d) sa réciproque.

Afin de poursuivre l'étude des ensembles discrets d'inertie minimale, une borne supérieure pour le rayon  $r$  du disque  $C_{a_0}$  est donnée comme fonction de la taille  $N$ . En outre, ce résultat permet de réduire le nombre de candidats à tester dans le processus de recherche des animaux de rondeur maximale tel que décrit dans la Section 3.4.

**Lemme 8** Soit  $\mathbf{A}$  un animal de rondeur maximale pour une taille  $N$  donnée. Alors, le rayon  $r = |a_0 - g| = \max_{a \in \mathbf{A}} |a - g|$  du disque  $C_{a_0}$  centré en  $g = g(\mathbf{A})$  satisfait

$$r \leq \frac{1}{\sqrt{2}} + \sqrt{\frac{N}{\pi}}.$$

**Preuve.** Considérons le polyomino  $\mathbf{P}$  associé à un animal  $\mathbf{A}$  de rondeur maximale. Nous allons montrer que le disque ouvert  $B^\circ(g, r - \frac{1}{\sqrt{2}})$ , centré en  $g$ , de rayon  $r - \frac{1}{\sqrt{2}}$  satisfait

$$B^\circ\left(g, r - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \subseteq \mathbf{P}, \quad (3.7)$$

et que puisque (3.7) implique

$$\pi\left(r - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \leq a(\mathbf{P}) = N,$$

alors le résultat désiré en découle. Afin d'établir (3.7), on choisit d'abord un nombre complexe quelconque  $z \in B^\circ(g, r - \frac{1}{\sqrt{2}})$ . Il s'agit ensuite de montrer qu'il existe  $\nu \in \mathbf{A}$  tel que  $z \in p_\nu$ , où  $p_\nu$  correspond au pixel centré en  $\nu$ .

Posons  $z = x + iy$  tel que

$$|z - g| < r - \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Il existe alors des entiers  $\nu_1, \nu_2$  tels que,

$$x = \nu_1 + f_1, \quad y = \nu_2 + f_2$$

où  $|f_1| \leq \frac{1}{2}, |f_2| \leq \frac{1}{2}$ . Soit  $\nu = \nu_1 + i\nu_2$  et  $f = f_1 + if_2$  et on a  $z = \nu + f \in p_\nu$ . Il ne reste plus qu'à montrer que  $\nu \in \mathbf{A}$ . Par l'inégalité du triangle, on a

$$|\nu - g| - |f| \leq |\nu - g + f| = |z - g| < r - \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

D'où,

$$|\nu - g| < r - \frac{1}{\sqrt{2}} + |f| \leq r - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} = r,$$

étant donné que  $|f| = \sqrt{f_1^2 + f_2^2} \leq \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ . On peut donc conclure, par le Théorème 4 que  $\nu \in \mathbf{A}$ . En effet, tous les points entiers contenus dans le disque ouvert  $B^\circ(g, r)$  appartiennent nécessairement à  $\mathbf{A}$ . ■

### 3.4 Algorithme pour engendrer les ensembles discrets de rondeur maximale

L'objectif ici est d'engendrer, pour une taille  $N$  donnée, tous les animaux de rondeur maximale. Pour ce faire, une première classification est effectuée selon la suite  $(n_1, \dots, n_s)$  des projections verticales des animaux satisfaisant la contrainte  $N = n_1 + \dots + n_s$ , où  $n_k$  est le nombre

de points contenus dans la  $k$ -ième colonne pour  $k = 1, \dots, s$ . La  $k$ -ième colonne associée à une projection verticale pour  $n_k$  pair (respectivement impair) est dite paire (respectivement impaire).

Soit  $\mathcal{A}_{n_1, \dots, n_s}$  l'ensemble de tous les animaux possédant la suite  $(n_1, \dots, n_s)$  de projections verticales sous la contrainte  $N = n_1 + \dots + n_s$ . On caractérise d'abord les animaux  $\mathbf{A} \in \mathcal{A}_{n_1, \dots, n_s}$  de telle sorte que

$$I(\mathbf{A}) = \min\{I(\mathbf{B}) : \mathbf{B} \in \mathcal{A}_{n_1, \dots, n_s}\}. \quad (3.8)$$

Les animaux de rondeur maximale pour une taille  $N$  donnée sont précisément ceux qui minimisent les  $I(\mathbf{A})$  dépendants de toutes les combinaisons des suites  $(n_1, \dots, n_s)$  de projections possibles, sous la condition  $n_1 + \dots + n_s = N$ .

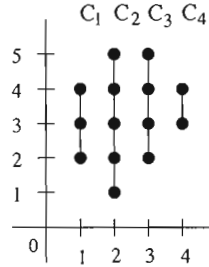
**Lemme 9** *Soit  $(n_1, \dots, n_s)$  une suite finie d'entiers  $> 0$  satisfaisant  $n_1 + \dots + n_s = N$ . Alors,*

- (i) *si  $(n_1, \dots, n_s)$  sont tous de même parité, alors il existe un unique animal  $\mathbf{A} \in \mathcal{A}_{n_1, \dots, n_s}$ , à translation près, de moment d'inertie minimal parmi tous les animaux de  $\mathcal{A}_{n_1, \dots, n_s}$ . Cet animal est symétrique par rapport à un axe horizontal ;*
- (ii) *sinon, il y a exactement deux animaux  $\mathbf{A}, \mathbf{A}' \in \mathcal{A}_{n_1, \dots, n_s}$ , à translation près, de moment d'inertie minimal parmi tous les animaux de  $\mathcal{A}_{n_1, \dots, n_s}$ . Ces animaux sont symétriques l'un de l'autre. Les centres de gravité des colonnes paires (respectivement impaires) de  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{A}'$ , sont tous situés sur un même axe horizontal  $X$  (respectivement  $X'$ ). La distance entre les deux axes  $X$  et  $X'$  est de  $1/2$ .*

*De plus, le moment d'inertie de  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{A}'$  est donné par la formule*

$$I(\mathbf{A}) = \frac{1}{12} \sum_{k=1}^s n_k^3 - \frac{1}{12} N + \sum_{k=1}^s k^2 n_k - \frac{1}{N} \left( \sum_{k=1}^s k n_k \right)^2 + \frac{1}{4N} \left( \sum_{n_k \text{ pair}} n_k \right) \left( \sum_{n_k \text{ impair}} n_k \right). \quad (3.9)$$

**Preuve.** Soit  $S$  un ensemble discret avec la suite  $(n_1, \dots, n_s)$  de projections verticales, à laquelle est associée la suite des colonnes  $C_1, \dots, C_s$ . Plus précisément, la colonne  $C_k$  correspond aux points de  $S$  situés au dessus du point  $(k, 0)$ , pour  $k = 1, \dots, s$  (voir Figure 3.10).



**Figure 3.10** Les colonnes  $C_k$  correspondent aux points de  $S$  situés au-dessus du point  $(k, 0)$ .

Considérons  $g_k$  le centre de gravité de  $C_k$  pour  $1 \leq k \leq s$ . Notons qu'il existe  $\nu_k \in \mathbb{Z}$  tel que, pour  $1 \leq k \leq s$ ,

$$g_k = \begin{cases} (k + i\nu_k) & \text{si } n_k \text{ est impair,} \\ (k + i(\nu_k + \frac{1}{2})) & \text{si } n_k \text{ est pair.} \end{cases}$$

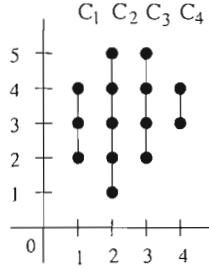
Autrement dit,

$$g_k = k + i \left( \nu_k + \frac{1}{2} \chi_{\text{pair}}(n_k) \right) \quad k = 1, \dots, s$$

où  $\chi_{\text{pair}}(n) = 1$ , si  $n$  est pair et 0 sinon.

Par le Lemme 5 et la formule (3.3), on a

$$\begin{aligned} I(S) &= I(C_1 \cup \dots \cup C_s) \\ &= I(C_1) + \dots + I(C_s) + I(\{g_1, \dots, g_s\}) \\ &= \sum_{k=1}^s \frac{n_k^3 - n_k}{12} + \frac{1}{N} \sum_{k < l} n_k n_l |(k - l) \\ &\quad + i(\nu_k - \nu_l + \frac{1}{2}(\chi_{\text{pair}}(n_k) - \chi_{\text{pair}}(n_l)))|^2 \\ &= \frac{1}{12} \sum_{k=1}^s n_k^3 - \frac{1}{12} N + \frac{1}{N} \sum_{k < l} n_k n_l (k - l)^2 \\ &\quad + \frac{1}{2N} \sum_{k, l} n_k n_l \left( \nu_k - \nu_l + \frac{1}{2}(\chi_{\text{pair}}(n_k) - \chi_{\text{pair}}(n_l)) \right)^2 \\ &= \frac{1}{12} \sum_{k=1}^s n_k^3 - \frac{1}{12} N + \sum_{k=1}^s k^2 n_k - \frac{1}{N} \left( \sum_{k=1}^s k n_k \right)^2 + \Omega, \end{aligned}$$



**Figure 3.10** Les colonnes  $C_k$  correspondent aux points de  $S$  situés au-dessus du point  $(k, 0)$ .

Considérons  $g_k$  le centre de gravité de  $C_k$  pour  $1 \leq k \leq s$ . Notons qu'il existe  $\nu_k \in \mathbb{Z}$  tel que, pour  $1 \leq k \leq s$ ,

$$g_k = \begin{cases} (k + i\nu_k) & \text{si } n_k \text{ est impair,} \\ (k + i(\nu_k + \frac{1}{2})) & \text{si } n_k \text{ est pair.} \end{cases}$$

Autrement dit,

$$g_k = k + i \left( \nu_k + \frac{1}{2} \chi_{\text{pair}}(n_k) \right) \quad k = 1, \dots, s$$

où  $\chi_{\text{pair}}(n) = 1$ , si  $n$  est pair et 0 sinon.

Par le Lemme 5 et la formule (3.3), on a

$$\begin{aligned} I(S) &= I(C_1 \cup \dots \cup C_s) \\ &= I(C_1) + \dots + I(C_s) + I(\{g_1, \dots, g_s\}) \\ &= \sum_{k=1}^s \frac{n_k^3 - n_k}{12} + \frac{1}{N} \sum_{k < l} n_k n_l (k - l) \\ &\quad + i \left( \nu_k - \nu_l + \frac{1}{2} (\chi_{\text{pair}}(n_k) - \chi_{\text{pair}}(n_l)) \right)^2 \\ &= \frac{1}{12} \sum_{k=1}^s n_k^3 - \frac{1}{12} N + \frac{1}{N} \sum_{k < l} n_k n_l (k - l)^2 \\ &\quad + \frac{1}{2iN} \sum_{k, l} n_k n_l \left( \nu_k - \nu_l + \frac{1}{2} (\chi_{\text{pair}}(n_k) - \chi_{\text{pair}}(n_l)) \right)^2 \\ &= \frac{1}{12} \sum_{k=1}^s n_k^3 - \frac{1}{12} N + \sum_{k=1}^s k^2 n_k - \frac{1}{N} \left( \sum_{k=1}^s k n_k \right)^2 + \Omega, \end{aligned}$$

où après quelques manipulations.

$$\Omega = \frac{1}{2N} \left( \sum_{n_k \equiv n_l \pmod{2}} n_k n_l (\nu_k - \nu_l)^2 + 2 \sum_{n_k \text{ pair}, n_l \text{ impair}} n_k n_l (\nu_k - \nu_l + \frac{1}{2})^2 \right).$$

La valeur minimale de la dernière expression est atteinte si et seulement si

$$\nu_k = \nu_l, \quad \text{lorsque } n_k \equiv n_l \pmod{2}$$

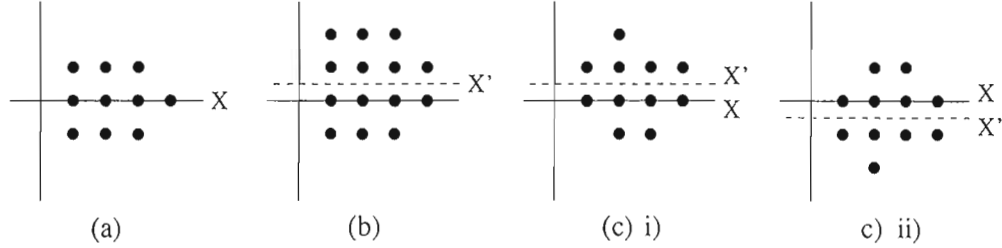
et

$$(\nu_k - \nu_l + \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}, \quad \text{lorsque } n_k \text{ est pair et } n_l \text{ est impair.}$$

Autrement dit, la valeur minimale est obtenue si et seulement si, pour certains  $r \in \mathbb{Z}$ ,

$$\nu_k = r \text{ pour tout } k, \quad \text{ou} \quad \begin{cases} \nu_k = r - 1 & \text{pour } n_k \text{ pair,} \\ \nu_l = r & \text{pour } n_l \text{ impair.} \end{cases}$$

Comme le moment d'inertie est invariant par translation, on peut supposer que  $r = 0$  et on conclut que l'allure d'un animal **A** avec les projections  $(n_1, \dots, n_s)$  correspond exclusivement à une des trois situations :



**Figure 3.11** (a)  $n_k$  tous impairs (b)  $n_k$  tous pairs (c) certains  $n_k$  impairs, certains  $n_k$  pairs.

Cas 1. Si tous les  $n_k$  sont impairs, alors  $g_k = k$  pour  $k = 1, \dots, s$  (voir Figure 3.11 (a)).

Cas 2. Si tous les  $n_k$  sont pairs, alors  $g_k = k + \frac{1}{2}i$  pour  $k = 1, \dots, s$  (voir Figure 3.11 (b)).

Cas 3. Autrement, deux configurations sont possibles :

3.i)  $g_k = k$ , pour  $n_k$  impair et  $g_k = k + \frac{1}{2}i$ , pour  $n_k$  pair (voir Figure 3.11 (c) i),

3.ii)  $g_k = k$ , pour  $n_k$  impair et  $g_k = k - \frac{1}{2}i$ , pour  $n_k$  pair (voir Figure 3.11 (c) ii).

De plus, on vérifie assez facilement que la valeur minimale de  $\Omega$  est donnée par

$$\Omega = \frac{1}{4N} \left( \sum_{n_k \text{ pair}} n_k \right) \left( \sum_{n_k \text{ impair}} n_k \right),$$

ce qui établit (3.9) et conclut la démonstration. ■

Puisque les animaux de rondeur maximale sont des quasi-disques, on observe que notre recherche des animaux les plus ronds pour une taille  $N$  donnée, peut se restreindre au cas des suites de projections  $(n_1, \dots, n_s)$  satisfaisant

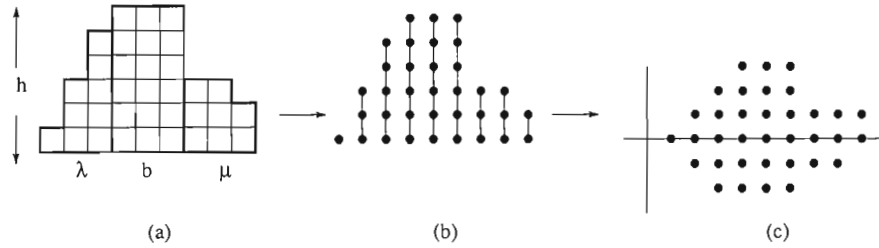
$$0 < n_1 \leq n_2 \leq \dots \leq n_k < n_{k+1} = \dots = n_{l-1} > n_l \geq \dots \geq n_{s-1} \geq n_s > 0.$$

Ce type de suite est appelée *partition faiblement unimodale* de  $N$  (*ras* ou *partition planaire* de  $N$ ), voir (Stanley, 1997).

À l'aide de l'outil de calcul formel Maple (Maplesoft, 2007), nous avons développé un programme permettant d'engendrer tous les animaux les plus ronds pour une taille  $N$  donnée. La stratégie adoptée est présentée ici. En premier lieu, la description d'une suite faiblement unimodale est donnée par

$$(\lambda, b, h, \mu),$$

où  $\lambda, \mu$  sont des partages d'entiers et  $b, h \in \mathbb{N}^*$ . La suite  $(n_1, \dots, n_s)$  des projections verticales



**Figure 3.12** (a)  $(\lambda, b, h, \mu)$ , (b)  $(n_1, \dots, n_s)$ , (c) animal **A** à tester, à rotation près.

satisfaisant  $n_1 + \dots + n_s = N$  est donnée par

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_k < \underbrace{h = \dots = h}_b > \mu_l \geq \mu_{l-1} \geq \dots \geq \mu_1, \quad (3.10)$$

avec  $|\lambda| + bh + |\mu| = N$  (voir Figure 3.12 (a)).



Ensuite toutes les suites  $(\lambda, b, h, \mu)$  minimisant le moment d'inertie  $I(\mathbf{A})$  associé à l'animal  $\mathbf{A}$ , qui est calculé par la formule (3.9) du Lemme 9, sont engendrées. En vertu du Lemme 8, on peut restreindre le nombre de 4-tuplets  $(\lambda, b, h, \mu)$  à engendrer à ceux qui satisfont les conditions

$$s \leq 2r + 1 \quad \text{et} \quad h \leq 2r + 1,$$

c'est-à-dire

$$\max(s, h) \leq \lfloor \sqrt{2} + 2\sqrt{\frac{N}{\pi}} + 1 \rfloor. \quad (3.11)$$

Par exemple, pour chaque  $N \leq 40$ , l'ensemble des représentations, à symétrie diédrale près, des animaux de rondeur maximale pour une taille  $N$  est donné dans le Tableau 3.1. À titre indicatif, pour  $N = 40$ , le nombre de 4-tuples  $(\lambda, b, h, \mu)$  à tester satisfaisant (3.10) et (3.11) est de 76396 alors que pour ceux satisfaisant uniquement (3.10), le nombre s'élève à 4207763. Le Tableau 3.2 contient diverses statistiques associées aux animaux les plus ronds pour  $N \leq 40$ . En l'occurrence, dans les cinq premières colonnes, on donne respectivement la taille  $N$ , les projections verticales, le moment d'inertie, le centre de gravité et le rayon du quasi-disque  $C_{a_0}$  associés aux animaux de rondeur maximale, à symétrie du groupe diédral  $D_4$  près, c'est-à-dire les symétries du carré.

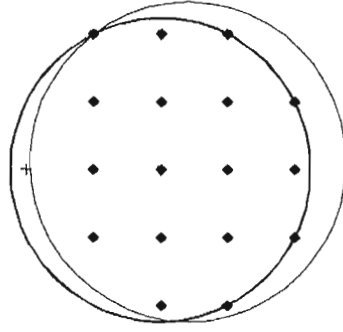
### 3.5 Remarques et quelques problèmes ouverts

Attardons nous d'abord à la remarque suivante. Considérons le plus petit disque fermé  $C_{\min}$  contenant le ou les animaux de rondeur maximale pour une taille  $N$  donnée. Soit  $c$  son centre et  $r_{\min}$  son rayon, c'est-à-dire  $C_{\min} = \{z : |z - c| \leq r_{\min}\}$ . Les deux dernières colonnes du Tableau 3.2 correspondent précisément aux valeurs de  $c$  et  $r_{\min}$ .

Intuitivement, on serait porté à croire que  $\mathbf{A}$  est un quasi-disque de rayon  $r_{\min}$  centré en  $c$ . Autrement dit, il serait possible dans le Théorème 4, de remplacer le disque  $C_{a_0}$  par  $C_{\min}$ . Cependant, en général, cette hypothèse s'avère être fausse.

Comme exemple, pour  $N = 17$ , considérons l'animal  $\mathbf{A}$  de rondeur maximale situé à la ligne 17a du Tableau 3.2. Ses projections verticales sont  $(4, 5, 5, 3)$  et le plus petit disque  $C_{\min}$  conte-

nant  $\mathbf{A}$  est de rayon  $r_{\min} = \sqrt{5}$ , centré au point  $(2, 0)$ . Dans ce cas, le disque  $C_{a_0}$  est de rayon  $r = \frac{40}{17}$ , centré au point  $(\frac{41}{17}, \frac{2}{17})$  (voir Figure 3.13).



**Figure 3.13** L'animal d'inertie minimale pour  $N = 17$  avec les disques  $C_{a_0}$  et  $C_{\min}$  (en gras).

On observe alors que  $\mathbf{A}$  n'est pas un quasi-disque de rayon  $r_{\min} = \sqrt{5}$ . En effet, le point entier  $(0, 0)$  représenté par le symbole  $+$  appartient au disque ouvert  $C_{\min}^o$  mais ne constitue pas un élément de  $\mathbf{A}$ . La Figure 3.13 montre l'animal  $\mathbf{A}$  ainsi que les disques  $C_{a_0}$  et  $C_{\min}$ . La conjecture énoncée ci-dessous découle de ces observations.

**Conjecture 1** *Il existe, à translation près, une infinité d'animaux  $\mathbf{A}$  de rondeur maximale qui ne sont pas des quasi-disques de rayon  $r_{\min}$ , où  $r_{\min}$  est le rayon du plus petit disque contenant l'animal  $\mathbf{A}$ .*

Cette hypothèse semble plausible, mais étant donnée la restriction des vérifications au cas des animaux de taille allant de  $N = 1$  jusqu'à  $N = 40$ , une seule occurrence, représentée à la Figure 3.13 avec  $N = 17$ , a été identifiée.

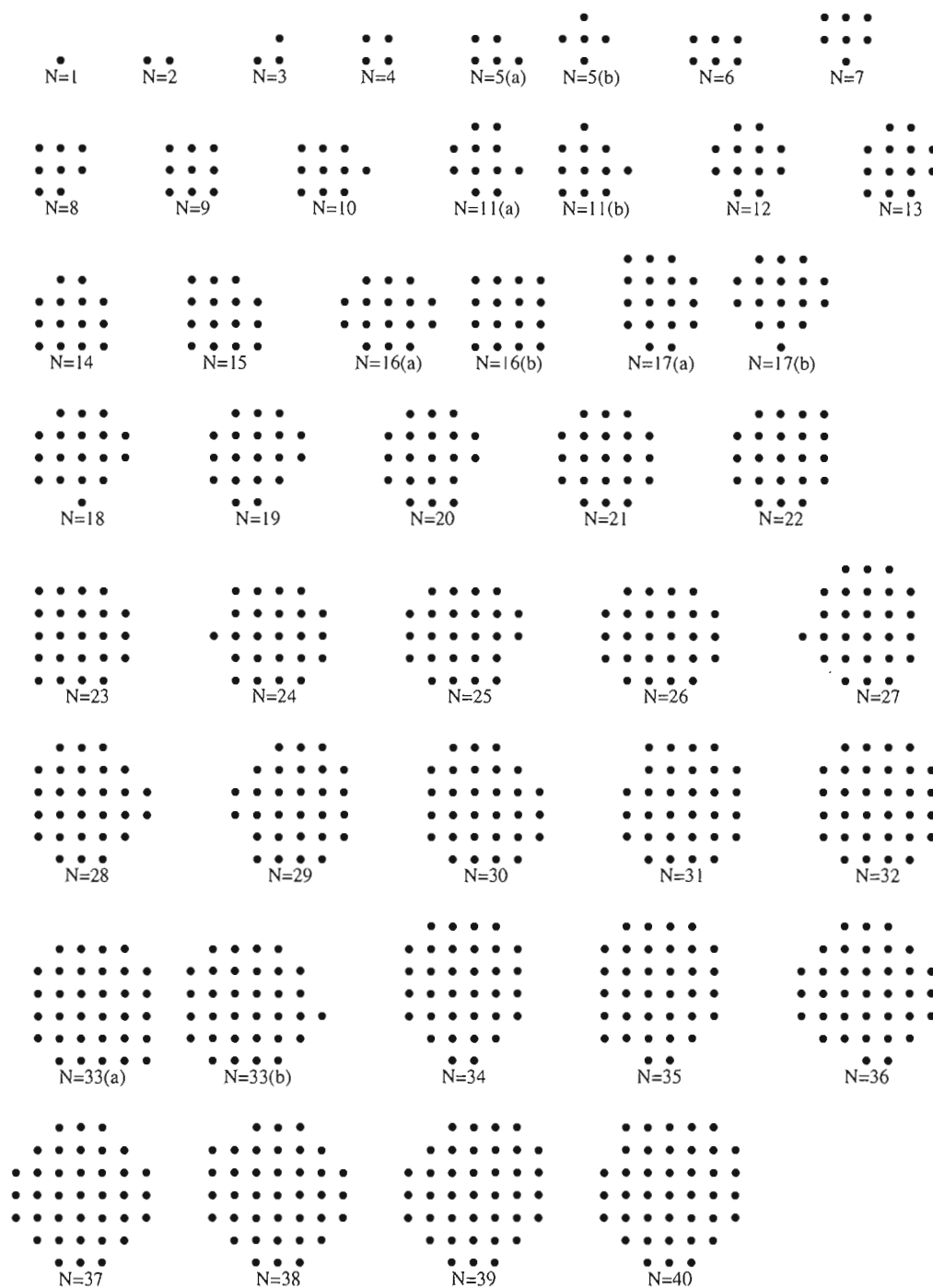
Un problème naturel à se poser concerne la généralisation des résultats précédents à d'autres familles de réseau. Il s'avère ici que l'on peut effectivement étendre les résultats énoncés à d'autres types de réseaux. En voici une brève description pour le cas particulier du réseau triangulaire régulier. Dans ce contexte, un ensemble discret  $S$  est une réunion de  $N$  cellules hexa-

gonales régulières distinctes et  $A$  est l'ensemble des centres de ces  $N$  hexagones, qui satisfait à l'analogie de la formule (3.2), c'est-à-dire,

$$I(S) = I(A) + N \cdot I(H),$$

où  $H$  est l'hexagone fondamental du réseau. Le réseau  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  est remplacé par l'ensemble  $\mathbb{T} \subseteq \mathbb{C}$  des centres de tous les hexagones du réseau. Les notions de forte-convexité, disque et quasi-disque se définissent facilement en utilisant  $\mathbb{T}$  et la métrique euclidienne. Les ensembles discrets d'inertie minimale du réseau  $\mathbb{T}$  sont des ensembles fortement-convexes (le Théorème 3 s'applique toujours). L'inégalité  $r \leq \frac{1}{\sqrt{2}} + \sqrt{\frac{N}{\pi}}$  pour le rayon  $r$  du quasi-disque, doit être remplacé par  $r \leq \alpha + \beta\sqrt{N}$  avec les constantes appropriées  $\alpha, \beta$ . Le calcul des ensembles discrets d'inertie minimale du réseau  $\mathbb{T}$ , peut se faire en adaptant la stratégie utilisée pour le réseau carré. Plus encore, il serait possible de généraliser à des familles de réseaux discrets en dimensions supérieures.

Finalement, dans un autre ordre d'idées, d'une part le problème de la reconnaissance des droites et des plans (Rosenfeld, 1974; Reveillès, 1991; Buzer, 2002; Buzer, 2003; Klette et Rosenfeld, 2004) est un problème qui a été grandement étudié et relativement bien compris. D'autre part, un problème qui demeure actuel et dont les motivations sont nombreuses en géométrie discrète, est la reconnaissance des cercles et des sphères (Andres, 1994; Andres et Jacob, 1997; Fiorio et Toutant, 2006; Fiorio, Jamet et Toutant, 2006). En outre, le bord des quasi-disques introduit dans la Section 3.3.2 semble se présenter, à priori, comme étant un bon candidat pour un cercle. Une étude plus approfondie des quasi-disques et leurs généralisations pourrait s'avérer utile.



**Tableau 3.1** Animaux les plus ronds de taille  $N \leq 40$ , à symétrie diédrale près.

$N$	$projections\ verticales$	$I(\mathbf{A})$	$g(\mathbf{A})$	$r$	$c(\mathbf{A})$	$r_{\min}(\mathbf{A})$
1	[1]	0	(1, 0)	0	(0, 0)	0
2	[1, 1]	$\frac{1}{2}$	$(\frac{3}{2}, 0)$	$\frac{1}{2}$	$(\frac{3}{2}, 0)$	$\frac{1}{2}$
3	[1, 2]	$\frac{4}{3}$	$(\frac{5}{3}, \frac{1}{3})$	$\frac{1}{3}\sqrt{5}$	$(\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$
4	[2, 2]	2	$(\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$(\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$
5a	[2, 2, 1]	4	$(\frac{9}{5}, \frac{2}{5})$	$\frac{2}{5}\sqrt{10}$	$(2, \frac{1}{2})$	$\frac{1}{2}\sqrt{5}$
5b	[1, 3, 1]	4	(2, 0)	1	(2, 0)	1
6	[2, 2, 2]	$\frac{33}{6}$	$(2, \frac{1}{2})$	$\frac{1}{2}\sqrt{5}$	$(2, \frac{1}{2})$	$\frac{1}{2}\sqrt{5}$
7	[2, 3, 2]	$\frac{52}{7}$	$(2, \frac{2}{7})$	$\frac{9}{7}$	$(2, \frac{1}{4})$	$\frac{5}{4}$
8	[3, 3, 2]	$\frac{78}{8}$	$(\frac{15}{8}, \frac{1}{8})$	$\frac{1}{8}\sqrt{130}$	(2, 0)	$\sqrt{2}$
9	[3, 3, 3]	$\frac{108}{9}$	(2, 0)	$\sqrt{2}$	(2, 0)	$\sqrt{2}$
10	[3, 3, 3, 1]	$\frac{156}{10}$	$(\frac{11}{5}, 0)$	$\frac{9}{5}$	$(\frac{7}{3}, 0)$	$\frac{5}{3}$
11a	[2, 4, 4, 1]	$\frac{212}{11}$	$(\frac{26}{11}, \frac{5}{11})$	$\frac{1}{11}\sqrt{349}$	$(\frac{5}{2}, \frac{1}{2})$	$\frac{1}{2}\sqrt{10}$
11b	[3, 4, 3, 1]	$\frac{212}{11}$	$(\frac{24}{11}, \frac{2}{11})$	$\frac{2}{11}\sqrt{101}$	$(\frac{9}{4}, \frac{1}{4})$	$\frac{5}{4}\sqrt{2}$
12	[2, 4, 4, 2]	$\frac{264}{12}$	$(\frac{5}{2}, \frac{1}{2})$	$\frac{1}{2}\sqrt{10}$	$(\frac{5}{2}, \frac{1}{2})$	$\frac{1}{2}\sqrt{10}$
13	[3, 4, 4, 2]	$\frac{340}{13}$	$(\frac{31}{13}, \frac{5}{13})$	$\frac{18}{13}\sqrt{2}$	$(\frac{23}{10}, \frac{3}{10})$	$\frac{13}{10}\sqrt{2}$
14	[3, 4, 4, 3]	$\frac{425}{14}$	$(\frac{5}{2}, \frac{2}{7})$	$\frac{3}{14}\sqrt{85}$	$(\frac{5}{2}, \frac{1}{6})$	$\frac{1}{6}\sqrt{130}$
15	[4, 4, 4, 3]	$\frac{528}{15}$	$(\frac{12}{5}, \frac{2}{5})$	$\frac{1}{5}\sqrt{113}$	$(\frac{5}{2}, \frac{1}{2})$	$\frac{3}{2}\sqrt{2}$
16a	[2, 4, 4, 4, 2]	$\frac{640}{16}$	$(3, \frac{1}{2})$	$\frac{1}{2}\sqrt{17}$	$(3, \frac{1}{2})$	$\frac{1}{2}\sqrt{17}$
16b	[4, 4, 4, 4]	$\frac{640}{16}$	$(\frac{5}{2}, \frac{1}{2})$	$\frac{3}{2}\sqrt{2}$	$(\frac{5}{2}, \frac{1}{2})$	$\frac{3}{2}\sqrt{2}$
17a	[4, 5, 5, 3]	$\frac{780}{17}$	$(\frac{41}{17}, \frac{2}{17})$	$\frac{40}{17}$	(2, 0)	$\sqrt{5}$
17b	[2, 4, 5, 4, 2]	$\frac{780}{17}$	$(3, \frac{6}{17})$	$\frac{40}{17}$	$(3, \frac{1}{6})$	$\frac{13}{6}$
18	[3, 4, 5, 4, 2]	$\frac{925}{18}$	$(\frac{26}{9}, \frac{5}{18})$	$\frac{1}{18}\sqrt{1685}$	(3, 0)	$\sqrt{5}$
19	[3, 5, 5, 4, 2]	$\frac{1084}{19}$	$(\frac{54}{19}, \frac{3}{19})$	$\frac{1}{19}\sqrt{1937}$	(3, 0)	$\sqrt{5}$
20	[3, 5, 5, 5, 2]	$\frac{1255}{20}$	$(\frac{29}{10}, \frac{1}{20})$	$\frac{1}{20}\sqrt{2165}$	(3, 0)	$\sqrt{5}$

$N$	<i>projections verticales</i>	$I(\mathbf{A})$	$g(\mathbf{A})$	$r$	$c(\mathbf{A})$	$r_{\min}(\mathbf{A})$
21	[3, 5, 5, 5, 3]	$\frac{1428}{21}$	(3, 0)	$\sqrt{5}$	(3, 0)	$\sqrt{5}$
22	[3, 5, 5, 5, 4]	$\frac{1664}{22}$	$(\frac{34}{11}, \frac{1}{11})$	$\frac{21}{11}\sqrt{2}$	$(\frac{45}{14}, \frac{3}{14})$	$\frac{25}{14}\sqrt{2}$
23	[5, 5, 5, 5, 3]	$\frac{1916}{23}$	$(\frac{65}{23}, 0)$	$\frac{2}{23}\sqrt{970}$	$(\frac{21}{8}, 0)$	$\frac{5}{8}\sqrt{17}$
24	[1, 5, 5, 5, 5, 3]	$\frac{2183}{24}$	$(\frac{89}{24}, 0)$	$\frac{65}{24}$	$(\frac{18}{5}, 0)$	$\frac{13}{5}$
25	[3, 5, 5, 5, 5, 2]	$\frac{2474}{25}$	$(\frac{17}{5}, \frac{1}{25})$	$\frac{1}{25}\sqrt{4801}$	$(\frac{7}{2}, 0)$	$\frac{1}{2}\sqrt{29}$
26	[3, 5, 5, 5, 5, 3]	$\frac{2769}{26}$	$(\frac{7}{2}, 0)$	$\frac{1}{2}\sqrt{29}$	$(\frac{7}{2}, 0)$	$\frac{1}{2}\sqrt{29}$
27	[1, 4, 6, 6, 6, 4]	$\frac{3116}{27}$	$(\frac{35}{9}, \frac{13}{27})$	$\frac{13}{27}\sqrt{37}$	$(\frac{15}{4}, \frac{1}{2})$	$\frac{5}{4}\sqrt{5}$
28	[4, 6, 6, 6, 4, 2]	$\frac{3464}{28}$	$(\frac{45}{14}, \frac{1}{2})$	$\frac{1}{14}\sqrt{1570}$	$(\frac{13}{4}, \frac{1}{2})$	$\frac{5}{4}\sqrt{5}$
29	[2, 5, 6, 6, 6, 4]	$\frac{3852}{29}$	$(\frac{108}{29}, \frac{12}{29})$	$\frac{10}{29}\sqrt{74}$	$(\frac{7}{2}, \frac{1}{2})$	$\frac{1}{2}\sqrt{34}$
30	[4, 6, 6, 6, 5, 3]	$\frac{4258}{30}$	$(\frac{101}{30}, \frac{11}{30})$	$\frac{1}{30}\sqrt{7922}$	$(\frac{7}{2}, \frac{1}{2})$	$\frac{1}{2}\sqrt{34}$
31	[3, 6, 6, 6, 6, 4]	$\frac{4688}{31}$	$(\frac{111}{31}, \frac{14}{31})$	$\frac{1}{31}\sqrt{8642}$	$(\frac{7}{2}, \frac{1}{2})$	$\frac{1}{2}\sqrt{34}$
32	[4, 6, 6, 6, 6, 4]	$\frac{5120}{32}$	$(\frac{7}{2}, \frac{1}{2})$	$\frac{1}{2}\sqrt{34}$	$(\frac{7}{2}, \frac{1}{2})$	$\frac{1}{2}\sqrt{34}$
33a	[4, 6, 6, 6, 6, 5]	$\frac{5680}{33}$	$(\frac{118}{33}, \frac{14}{33})$	$\frac{80}{33}\sqrt{2}$	$(\frac{67}{18}, \frac{5}{18})$	$\frac{41}{18}\sqrt{2}$
33b	[4, 6, 6, 6, 6, 4, 1]	$\frac{5680}{33}$	$(\frac{119}{33}, \frac{16}{33})$	$\frac{80}{33}\sqrt{2}$	$(\frac{23}{6}, \frac{1}{2})$	$\frac{1}{6}\sqrt{370}$
34	[4, 6, 7, 7, 6, 4]	$\frac{6241}{34}$	$(\frac{7}{2}, \frac{5}{17})$	$\frac{1}{34}\sqrt{12833}$	$(\frac{7}{2}, \frac{1}{6})$	$\frac{1}{6}\sqrt{370}$
35	[5, 6, 7, 7, 6, 4]	$\frac{6816}{35}$	$(\frac{24}{7}, \frac{8}{35})$	$\frac{1}{35}\sqrt{13309}$	$(\frac{129}{38}, \frac{7}{38})$	$\frac{1}{38}\sqrt{15170}$
36	[3, 5, 6, 7, 7, 5, 3]	$\frac{7406}{36}$	$(\frac{145}{36}, \frac{1}{12})$	$\frac{1}{36}\sqrt{13546}$	(4, 0)	$\sqrt{10}$
37	[3, 5, 7, 7, 7, 5, 3]	$\frac{7992}{37}$	(4, 0)	$\sqrt{10}$	(4, 0)	$\sqrt{10}$
38	[4, 5, 7, 7, 7, 5, 3]	$\frac{8689}{38}$	$(\frac{149}{38}, \frac{1}{19})$	$\frac{37}{38}\sqrt{13}$	$(\frac{23}{6}, \frac{1}{6})$	$\frac{1}{6}\sqrt{410}$
39	[3, 5, 7, 7, 7, 6, 4]	$\frac{9388}{39}$	$(\frac{161}{39}, \frac{5}{39})$	$\frac{1}{39}\sqrt{17873}$	$(\frac{25}{6}, \frac{1}{6})$	$\frac{1}{6}\sqrt{410}$
40	[3, 6, 7, 7, 7, 6, 4]	$\frac{10127}{40}$	$(\frac{163}{40}, \frac{1}{5})$	$\frac{1}{40}\sqrt{19433}$	$(\frac{235}{58}, \frac{15}{58})$	$\frac{1}{58}\sqrt{39442}$

**Tableau 3.2** Paramètres associés aux animaux ronds ( $N \leq 40$ ), à symétrie diédrale près.

## Chapitre IV

### PROPRIÉTÉS DE CONTOURS D'ENSEMBLES DISCRETS

Dans cette partie, on se concentre davantage sur la frontière délimitant les ensembles discrets. De nombreuses propriétés s'y rattachant sont fondamentales et méritent une attention particulière. Ce chapitre est donc dédié à l'étude et l'analyse de chemins associés à des ensembles discrets du réseau  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ . Plus précisément, nous rapportons ici les principaux résultats contenus dans l'article (Brek, Labelle et Lacasse, 2006a), qui est le prolongement d'une version présentée à la conférence internationale DLT'05 (4–8 juillet 2005, Palerme, Italie) (Brek, Labelle et Lacasse, 2005c).

La plupart d'entre-nous ont déjà eu l'occasion d'expérimenter la tâche parfois difficile et hasardeuse de se rendre d'un endroit à un autre en suivant une liste d'indications décrivant des changements de direction aux intersections. En effet, dans une ville, trouver la route pour aller d'un point  $A$  à un point  $B$  est un problème assez simple lorsqu'on détient bien entendu, une description géométrique locale adéquate de la configuration des intersections. On peut appeler ceci l'*algorithme du chauffeur de taxi de Manhattan*. Il est aussi bien connu que toute courbe continûment différentiable dans le plan peut être approximée par une courbe linéaire par morceau, laquelle est utilisée pour résoudre la plupart des calculs de base en calcul différentiel. On adopte ici un point de vue paramétrique ou si on préfère *dynamique*, qui consiste à considérer une courbe comme une suite élémentaire de déplacements. Cette approche fournit une description locale de la courbe plutôt qu'une description globale, qui se caractérise en général, par l'utilisation de formules closes ou d'équations.

Voici maintenant comment est composé ce chapitre. Dans la Section 4.1, on introduit d'abord

le nombre d'enroulements d'un chemin dans le réseau carré, qui est une valuation découlant de l'algorithme du chauffeur de taxi de Manhattan. Certaines propriétés de base s'y rapportant sont également énoncées. Les résultats sont ensuite appliqués aux chemins *non croissants*. Comme corollaire, dans le cas des chemins non croissants fermés, on obtient une nouvelle démonstration du résultat de Daurat et Nivat (Daurat et Nivat, 2003) relevant de la géométrie discrète, qui met en relation le nombre  $S$  de points *saillants* et le nombre  $R$  de points *rentrants* d'un polyomino par l'équation ci-dessous :

$$S - R = 4.$$

Un problème naturel à considérer est d'analyser le comportement de la relation  $S - R = \text{cste}$  pour d'autres réseaux. Dans la Section 4.2, on montre que pour le cas des réseaux hexagonaux, il y a en effet une formule analogue établissant la relation

$$S - R = 6.$$

Cependant de façon assez étonnante, nous allons voir qu'il n'existe aucun autre réseau *régulier* ou *semi-régulier* pour lequel la formule  $S - R = \text{cste}$  soit toujours satisfaite.

#### 4.1 Valuation des chemins dans le réseau carré

Dans ce travail, les courbes sont tracées dans le réseau carré du plan discret  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ . Un chemin décrivant une courbe est un chemin polygonal formé de translations élémentaires unitaires dans ce plan. Un chemin fini  $w \in \Sigma^*$ , tel que défini au Chapitre 1, est un mot  $w$  sur l'alphabet  $\Sigma = \{a, \bar{a}, b, \bar{b}\}$ .

Par exemple, les chemins de la Figure 4.1 sont codés respectivement par les mots

$$\begin{aligned} u &= abbaa\bar{a}\bar{b}bba\bar{a}\bar{b}\bar{b}\bar{a}\bar{a}abbbbaabb\bar{a}\bar{b}\bar{a}\bar{a}\bar{b}\bar{b}aaaaaba\bar{a}\bar{b}\bar{a}\bar{b}\bar{a}\bar{b}baaabb\bar{a}\bar{a}ba, \\ v &= baab\bar{a}\bar{b}\bar{a}\bar{b}abbababab\bar{a}\bar{b}\bar{a}\bar{a}\bar{a}\bar{b}\bar{a}\bar{b}\bar{a}\bar{a}\bar{b}\bar{b}\bar{b}\bar{b}\bar{b}\bar{a}\bar{b}\bar{a}\bar{b}\bar{a}\bar{b}\bar{b}\bar{b}\bar{b}\bar{a}abb\bar{a}\bar{a}\bar{b}\bar{b}\bar{a}\bar{a}\bar{a}\bar{a}. \end{aligned}$$

Notons que les croisements des chemins dans la représentation géométrique peuvent sembler ambigus mais sans aucun doute, la représentation par le codage des mots est plus claire.



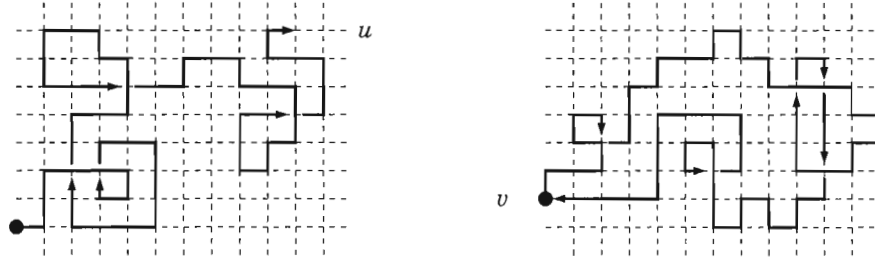


Figure 4.1 Un chemin ouvert  $u$  et un chemin fermé  $v$  d'origine  $\bullet$ .

#### 4.1.1 Algorithme du chauffeur de taxi de Manhattan

Un chemin du réseau peut aussi être décrit par une suite de changements de direction vers la gauche ou vers la droite ainsi que par des pas vers l'avant ou vers l'arrière. En utilisant l'alphabet des pas unitaires,  $\Sigma = \{a, b, \bar{a}, \bar{b}\}$ , nous définissons les ensembles de mouvements correspondants par

$$\begin{aligned} V_G &= \{ab, b\bar{a}, \bar{a}\bar{b}, \bar{b}a\} = \text{l'ensemble des changements de direction vers la gauche;} \\ V_D &= \{ba, a\bar{b}, \bar{b}\bar{a}, \bar{a}b\} = \text{l'ensemble des changements de direction vers la droite;} \\ V_A &= \{aa, \bar{a}\bar{a}, bb, \bar{b}\bar{b}\} = \text{l'ensemble des doubles pas qui avancent dans la même direction;} \\ V_R &= \{a\bar{a}, \bar{a}a, b\bar{b}, \bar{b}b\} = \text{l'ensemble des retours.} \end{aligned}$$

Ces ensembles correspondent respectivement aux mouvements de base vers la gauche (G), la droite (D), l'avant (A) et le retour (R). Notons qu'un chemin  $w = w_1 w_2 \cdots w_n$  est complètement déterminé, à translation près, par son pas initial et un mot sur l'alphabet  $\Sigma_d = \{G, D, A, R\}$ . En effet, considérons  $h : \Sigma^2 \longrightarrow \Sigma_d$ , définie par

$$h(u) = \begin{cases} G & \text{si } u \in V_G, \\ D & \text{si } u \in V_D, \\ A & \text{si } u \in V_A, \\ R & \text{si } u \in V_R. \end{cases} \quad (4.1)$$

On étend ensuite  $h$  à une fonction  $f : \Sigma^{\geq 2} \longrightarrow \Sigma \times \Sigma_d^*$  définie sur les chemins arbitraires par

$$f(w) = \left( w_1, \prod_{i=1}^{n-1} h(w_i w_{i+1}) \right), \quad (4.2)$$

où  $n$  est la longueur du mot  $w$  et le produit désigne la concaténation. Comme notre étude portera uniquement sur les propriétés géométriques des chemins, le pas initial sera omis, ce qui revient à travailler avec les classes d'équivalence déterminées par les permutations cycliques. Le lemme suivant est immédiat.

**Lemme 10** *Soit  $w \in \Sigma^*$  un chemin fermé, alors*

- (i)  *$w$  est de longueur paire :  $w = w_1 w_2 \cdots w_{2n}$ , pour un entier  $n \geq 1$  ;*
- (ii)  *$f(w)$  est de longueur impaire.*

**Preuve.** (i) Comme  $w$  est un chemin fermé, on a  $|w|_a = |w|_{\bar{a}}$  et  $|w|_b = |w|_{\bar{b}}$ . Il s'ensuit que,

$$|w| = |w|_a + |w|_{\bar{a}} + |w|_b + |w|_{\bar{b}} = 2|w|_a + 2|w|_b = 2(|w|_a + |w|_b).$$

(ii) découle directement de (i), étant donné que  $|f(w)| = |w| - 1$ . ■

Introduisons maintenant une fonction de poids  $\delta : \Sigma^2 \longrightarrow \{-1, 0, 1, 2\}$  sur les chemins de longueur deux définie par

$$\delta(u) = \begin{cases} -1 & \text{si } u \in V_D, \\ 0 & \text{si } u \in V_A, \\ 1 & \text{si } u \in V_G, \\ 2 & \text{si } u \in V_R. \end{cases} \quad (4.3)$$

On étend cette fonction de poids à une valuation  $P : \Sigma^{\geq 1} \longrightarrow \mathbb{Z}$  définie sur les chemins de longueur  $n \geq 1$ , en posant

$$P(w) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{n-1} \delta(w_i w_{i+1}) & \text{si } n > 1, \\ 0 & \text{si } n = 1. \end{cases} \quad (4.4)$$

Cette valuation correspond au *nombre d'enroulements* mesuré selon les changements de direction d'angle  $\frac{\pi}{2}$ . Un changement de direction vers la gauche contribue à une rotation positive d'angle  $(+1)\frac{\pi}{2}$ , un changement vers la droite à une rotation négative d'angle  $(-1)\frac{\pi}{2}$  et un élément dans  $V_R$  donne lieu à une rotation d'angle  $(2)\frac{\pi}{2} = \pi$  (retour dans la direction opposée). Pour les éléments de  $V_A$ , la contribution est nulle.

La formule d'additivité ci-dessous découle directement de la définition de la fonction de valuation  $P$  donnée par (4.4).

**Proposition 4** Soit  $w = w_1 \cdots w_n$  un mot dans  $\Sigma^{\geq 2}$ . Alors pour  $0 < k < n$ , on a

$$P(w) = P(w_1 \cdots w_k) + P(w_k w_{k+1}) + P(w_{k+1} \cdots w_n).$$

**Exemples.** Prenons le chemin  $u$  de la Figure 4.1. On a  $P(u) = -8$ . On observe que la lettre initiale est équivalente à la dernière et que trois des cycles sont décrits dans le sens horaire et un quatrième, dans le sens anti-horaire. Ceci traduit le fait que  $u$  peut se factoriser comme suit :

$$u = abbaa \cdot (a\bar{b}\bar{a}b) \cdot (ba\bar{b}\bar{b}\bar{b}\bar{a}\bar{a}abb) \cdot bbaab \cdot (\bar{b}\bar{a}\bar{b}\bar{a}\bar{b}\bar{b}aaa) \cdot aaba\bar{b}aa\bar{b} \cdot (\bar{b}\bar{a}\bar{b}\bar{a}bbaa) \cdot abb\bar{a}aba.$$

Autrement dit, la direction finale coïncide avec l'orientation initiale, mais puisqu'on a effectué quatre rotations complètes, le nombre de quarts de tour est donné par  $(-3 + 1) \times 4 = -10$ .

Pour le chemin  $v$  de la Figure 4.1, on a  $P(v) = -3$ . En effet, le chemin contient deux cycles qui sont parcourus dans le sens horaire et un cycle dans le sens anti-horaire. Cependant, comme la lettre de départ est  $v_1 = b$  et celle d'arrivée est  $\bar{a}$ , alors le nombre de quarts de tour est donné par  $(-2 + 1) \times 4 + 1 = -3$ .

Plus précisément, la valuation modulo 4 dépend simplement de la direction de la première et de la dernière lettre du chemin. Ces observations mènent au résultat suivant.

**Théorème 5** Soit  $w = w_1 w_2 \cdots w_n \in \Sigma^{\geq 2}$ , alors

$$P(w) \equiv \delta(w_1 w_n) \pmod{4}.$$

**Preuve.** La valuation modulo 4 indique la position relative entre le pas initial et le pas courant. Effectuons une induction sur  $n$ . Une analyse des cas possibles montre que le résultat est vrai pour  $n \leq 3$ . En particulier,

$$P(w_1 w_2 w_3) \equiv \delta(w_1 w_3) \pmod{4}.$$

Par la propriété d'additivité et l'hypothèse d'induction avec  $n - 1 \geq 3$ , on a

$$\begin{aligned} P(w_1 w_2 \cdots w_n) &= P(w_1 w_2 \cdots w_{n-1}) + P(w_{n-1} w_n) \\ &\equiv \delta(w_1 w_{n-1}) + \delta(w_{n-1} w_n) \pmod{4} \\ &= P(w_1 w_{n-1} w_n) \\ &\equiv \delta(w_1 w_n) \pmod{4}. \blacksquare \end{aligned}$$

Comme le nombre d'enroulements varie selon les positions relatives de la première et de la dernière lettre, les propriétés suivantes sont immédiates. C'est-à-dire que, pour tout chemin  $w = w_1 \cdots w_n$ , on a

$$P(w) \equiv 0 \pmod{4} \iff w_1 = w_n \text{ et } P(w \cdot w_1) \equiv P(\widetilde{w \cdot w_1}) \equiv 0 \pmod{4}.$$

Notons que des résultats analogues aux précédents sont vrais pour les chemins différentiables par morceaux en considérant l'angle entre les vecteurs tangents de leurs extrémités initiales et finales.

#### 4.1.2 Application aux chemins non croissants

Dans ce qui suit, nous appelons *chemin non croissant* tout chemin orienté qui ne revient pas sur ses pas (c'est-à-dire que deux pas successifs ne sont pas opposés l'un de l'autre) et qui ne possède pas de sommets distincts  $v, v_1, v_2, v_3, v_4$  tels que  $v_1vv_2$  et  $v_3vv_4$  (ou leurs images miroirs) soient des sous-chemins (voir Figure 4.2). Autrement dit, un chemin ne peut se croiser lui-même.

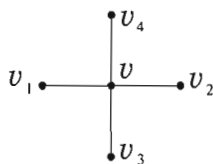
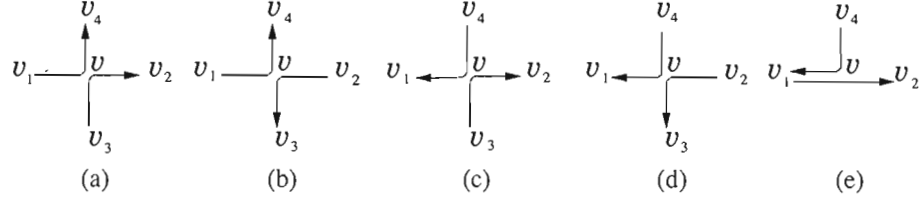


Figure 4.2 Les points multiples interdits.

Néanmoins, certains points multiples peuvent apparaître tels qu'illustrés à la Figure 4.3.

Remarquons qu'un chemin non croissant *fermé* ne peut contenir de points multiples du type (a) ou (d). En effet, supposons qu'un chemin fermé  $w$  possède un point multiple de type (a) par exemple, alors le point  $v_1$  devrait être relié au point  $v_2$  par un certain chemin non croissant  $x$ , et de même pour le point  $v_3$  et  $v_4$  par un chemin  $y$ . On observe alors que  $x$  et  $y$  s'intersectent, d'où la contradiction.



**Figure 4.3** Quelques points multiples autorisés.

Dans un chemin non croisant les pas  $V_R = \{a\bar{a}, \bar{a}a, b\bar{b}, \bar{b}b\}$  sont interdits et donc la valuation  $P$  est la restriction de  $\delta$  à l'ensemble  $\Sigma^2 \setminus V_R$ , c'est-à-dire que la fonction de poids, qui est identifiée par la même lettre,  $\delta : \Sigma^2 \setminus V_R \longrightarrow \{-1, 0, 1\}$  est définie par

$$\delta(u) = \begin{cases} -1 & \text{si } u \in V_D, \\ 0 & \text{si } u \in V_A, \\ 1 & \text{si } u \in V_G. \end{cases}$$

En conséquence, seuls les changements de direction vers la gauche et vers la droite contribuent au calcul du nombre d'enroulements.

Nous allons maintenant énoncer une condition suffisante pour que la valuation  $P(w)$  d'un chemin  $w = w_1 w_2 \cdots w_n$  où  $w_1 = w_n$  soit nulle plutôt que congrue à 0 modulo 4. Pour ce faire, nous introduisons deux demi-droites canoniquement associées à un chemin quelconque  $w$ . La demi-droite contenant le pas de départ  $w_1$  et aboutissant à son extrémité finale est appelée la *demi-droite initiale* du chemin  $w$  (voir Figure 4.4 (a)). De façon similaire, la demi-droite contenant le pas final  $w_n$  issue de son extrémité initiale est appelée la *demi-droite finale* du chemin  $w$  (voir Figure 4.4 (b)).



**Figure 4.4** Demi-droite (a) initiale ; (b) finale.

**Lemme 11** *Tout chemin ouvert non croisant et non vide  $w = w_1 w_2 \cdots w_n$  tel que*

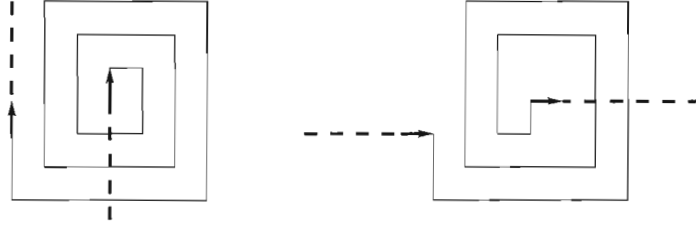
(i)  $w_1 = w_n$ ,

(ii) *le chemin n'intersecte ni la demi-droite initiale ni la demi-droite finale,*

*satisfait*

$$P(w) = P(\tilde{w}) = 0. \quad (4.5)$$

Bien qu'une formulation plus générale pourrait être énoncée, la condition (i) s'avère suffisante dans notre contexte et (ii) nous assure d'éviter les rotations complètes (enroulements) telles que décrites à la Figure 4.5.



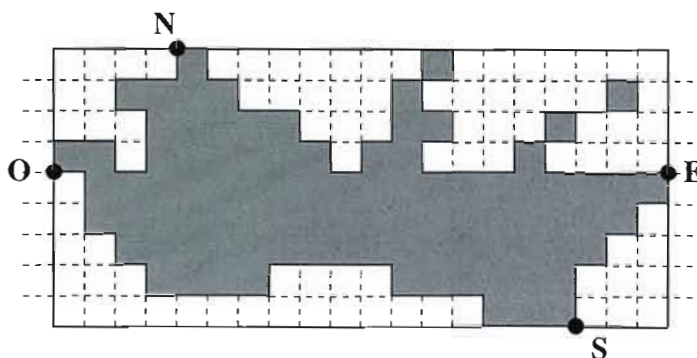
**Figure 4.5** Demi-droites intersectant un chemin.

**Preuve.** La condition (i) et la définition de  $P$  nous donnent

$$\begin{aligned} P(w) &= \sum_{i=1}^{n-1} \delta(w_i w_{i+1}) \\ &= \sum_{w_i w_{i+1} \in V_G} \delta(w_i w_{i+1}) + \sum_{w_i w_{i+1} \in V_A} \delta(w_i w_{i+1}) + \sum_{w_i w_{i+1} \in V_D} \delta(w_i w_{i+1}) \\ &= \sum_{w_i w_{i+1} \in V_G} \delta(w_i w_{i+1}) + \sum_{w_i w_{i+1} \in V_D} \delta(w_i w_{i+1}) \\ &\equiv 0 \pmod{4}. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Ainsi  $P(w) = 4k, k \in \mathbb{Z}$ . Comme la condition (ii) empêche le cumul de rotations complètes, on a donc  $k = 0$ , d'où  $P(w) = 0$ . ■

Tout chemin non croisant fermé  $w$  est la frontière d'une région unique constituée de carrés unitaires. Soit  $Q$  le rectangle circonscrit de  $w$  tel que montré à la Figure 4.6.



**Figure 4.6** Une région et ses quatre points extrémaux O, N, E et S.

Les quatre points *extrémaux* sont définis par :

O le point le plus bas de la frontière situé sur le côté gauche de  $Q$ ,

N le point le plus à gauche de la frontière situé sur côté du haut de  $Q$ ,

E le point le plus haut de la frontière situé sur le côté droit de  $Q$ ,

S le point le plus à droite de la frontière sur le côté du bas de  $Q$ .

À rotation cyclique près, en partant du point O,  $w$  peut s'écrire (dans le sens anti-horaire) sous la forme

$$w = (aX) \cdot (bY) \cdot (\bar{a}Z) \cdot (\bar{b}V), \quad (4.7)$$

où  $X, Y, Z, V$  sont possiblement vides, pas nécessairement simultanément, ou de la forme  $X = xa$ ,  $Y = yb$ ,  $Z = z\bar{a}$ ,  $V = v\bar{b}$  pour des chemins  $x, y, z$  et  $v$ . Les cas vides correspondent à des points extrémaux qui coïncident avec des coins du rectangle.

Considérons le cas où  $X, Y, Z$ , et  $V$  ne sont pas vides. En s'appuyant sur la Propriété 4 d'additivité et le Lemme 11, on a

$$\begin{aligned} P(w) &= P(axa) + P(ab) + P(byb) + P(b\bar{a}) + P(\bar{a}z\bar{a}) + P(\bar{a}\bar{b}) + P(\bar{b}v\bar{b}) \\ &= 0 + 1 + 0 + 1 + 0 + 1 + 0 = 3, \end{aligned}$$

ou de façon équivalente

$$|f(w)|_G = |f(w)|_D + 3.$$

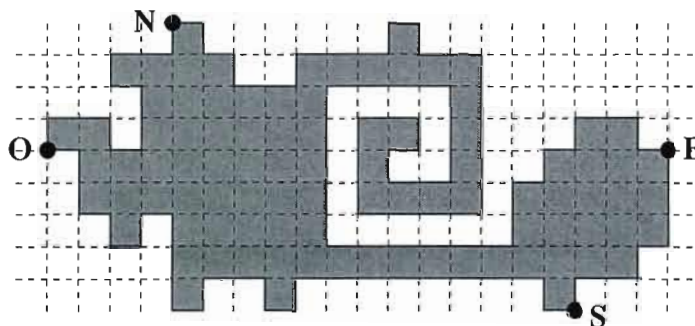
Le cas où au moins un des chemins  $X, Y, Z, V$  est vide se traite de façon similaire et est laissé au lecteur. Ces dernières observations établissent donc le résultat ci-dessous.

**Proposition 5** *Tout chemin non croisant fermé  $w$  satisfait  $P(w) = 3$ .*

Une différente approche, plus géométrique, menant au même résultat est celle du *chauffeur de taxi de Manhattan*. L'argumentation va comme suit.

**Preuve (du chauffeur de taxi de Manhattan).** En effectuant sa course du point  $O$  à  $O$  dans le sens anti-horaire, le chauffeur de taxi fait trois rotations de plus vers la gauche que vers la droite. En effet, par le Lemme 11, chacun des quatres chemins ouverts  $OS, SE, EN$  et  $NO$  de la factorisation du parcours  $w$ , contient exactement le même nombre de changements de direction vers la droite que vers la gauche. Ensuite, par la propriété d'additivité, on doit ajouter les trois changements de direction vers la gauche (rotations de  $\frac{\pi}{2}$ ), qui apparaissent lorsqu'on passe successivement par les trois points extrémaux  $S, E, N$ . ■

D'après la terminologie de Daurat et Nivat (Daurat et Nivat, 2003), en parcourant dans le sens anti-horaire un chemin non croisant fermé délimitant une région du plan, les rotations vers la gauche (resp. vers la droite) correspondent à des points frontières dits *saillants* (resp. *rentrants*). En particulier, le chemin non croisant peut décrire la frontière d'un polyomino au sens du Chapitre 1. En l'occurrence, dans la décomposition de la Figure 4.7, les quatres points extrémaux du polyomino sont saillants.



**Figure 4.7** Un polyomino simplement connexe et ses quatres points extrémaux saillants.



Selon Daurat et Nivat (Daurat et Nivat, 2003), un ensemble discret  $E$  est un sous-ensemble de  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  et un élément  $(i, j) \in E$  correspond à un carré unitaire dont les sommets sont  $(i \pm \frac{1}{2}, j \pm \frac{1}{2})$ . De plus, le plan discret translaté est défini par  $\mathbb{P}_{1/2} = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) + \mathbb{Z}^2$  et les point dits *saillants* et *rentrants* sont définis comme suit.

**Définition 13** • *Un coin est un couple  $(M, N)$  avec  $M \in \mathbb{P}_{1/2}$ ,  $N \in \mathbb{Z}^2$  et  $M - N$  est l'ensemble  $\{(\pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2})\}$ .*

- *Un coin  $(M, N)$  est un coin saillant de  $E$ , si  $N \in E$  et  $M$  est l'extrémité commune de deux côtés consécutifs de la frontière de  $E$ , qui sont également des côtés du carré  $N + [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^2$ .*
- *Un coin  $(M, N)$  est un coin rentrant de  $E$ , si  $M$  est l'extrémité commune de deux côtés consécutifs de la frontière de  $E$ , qui ne sont pas des côtés du carré  $N + [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^2$ .*

Avant d'énoncer la prochaine définition, rappelons quelques notions reliées aux multi ensembles. D'abord, un *multi ensemble* est un ensemble dont les éléments sont munis d'une multiplicité. Plus précisément, un multi ensemble est un couple  $U = (U_0, f)$  où  $f : U_0 \rightarrow \mathbb{N}^*$ . L'ensemble  $U_0$  est appelé le *support* de  $U$  et pour tout élément  $u \in U_0$ , l'entier  $f(u)$  est appelé la multiplicité de  $u$  dans  $U$  et est dénoté  $\text{mult}_U(u)$ .

**Définition 14** *Le multi ensemble des points saillants-frontière (resp. rentrants-frontière) d'un ensemble discret  $E$ , dénoté  $S_F(E)$  (resp.  $R_F(E)$ ), est le multi ensemble dont le support est inclus dans  $\mathbb{P}_{1/2}$  et tel que pour tout  $M \in \mathbb{P}_{1/2}$ , le nombre  $\text{mult}_{S_F(E)}(M)$  (resp.  $\text{mult}_{R_F(E)}(M)$ ) est le nombre de  $N$  tel que  $(M, N)$  est un coin saillant (resp. coin rentrant).*

Autrement dit, selon leur terminologie, modulo une translation par  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ , un point  $M$  sur la frontière d'un polyomino  $\mathbf{P}$  est dit (frontière-) saillant (voir Figure 4.8 (a)) s'il appartient à l'intersection de deux côtés consécutifs d'un carré de  $\mathbf{P}$ . Le point  $M$  est dit (frontière-) rentrant (voir Figure 4.8 (b)) s'il appartient à l'intersection de deux arêtes consécutives de la frontière de  $\mathbf{P}$  qui sont des côtés d'un carré n'appartenant pas à  $\mathbf{P}$ .

En conséquence, dans le contexte des chemins non croissants fermés, il apparaît une preuve simple et constructive du résultat de Daurat et Nivat (Daurat et Nivat, 2003) :



**Figure 4.8** Exemples d'un point (a) saillant et (b) rentrant selon Daurat et Nivat.

**Corollaire 4** *Dans une région du plan dont la frontière est délimitée par un chemin non croisant fermé, en particulier pour un polyomino, le nombre  $S$  de points saillants et le nombre  $R$  de points rentrants sont reliés par la formule*

$$S - R = 4. \quad (4.8)$$

**Preuve.** Soit  $w$  un chemin de contour non croisant décrit dans le sens anti-horaire. En partant du point  $O$  et en utilisant (4.7), on a.

$$P(wa) = P(w) + P(\bar{b}a) = 3 + 1 = 4,$$

ou de façon équivalente

$$|f(wa)|_G = |f(wa)|_D + 4.$$

■

Il est à noter que les quatres points saillants supplémentaires peuvent s'identifier canoniquement comme les points  $O$ ,  $S$ ,  $E$  et  $N$ .

## 4.2 Autres réseaux réguliers

Un peu dans le même esprit, en définissant de manière appropriée la fonction de poids sur l'ensemble  $\Sigma^2$  des pas élémentaires, il est possible d'étendre les résultats de la Section 4.1 à des chemins arbitraires et à d'autres familles de réseaux. Un candidat intéressant à étudier est le réseau hexagonal, pour lequel une adaptation directe des méthodes précédentes conduits à des propriétés similaires.

En effet, les chemins hexagonaux sont codés par un ensemble de mots, noté  $H$ , formés sur un alphabet de 6-lettres,  $\Sigma_h = \{a, b, c, \bar{a}, \bar{b}, \bar{c}\}$ , où  $a, b$  et  $c$  correspondent respectivement aux directions de base  $e^{i2n\frac{\pi}{6}}$ , pour  $n = 0, 1, 2$ . Comme les changements de direction d'angle  $4\pi/6$  vers la gauche ou vers la droite ainsi que les doubles pas dans une même direction n'existent pas dans le réseau hexagonal, les mots décrivant les chemins dans un tel réseau sont

$$w \in H = \Sigma_h^* \setminus \Sigma_h^* \cdot \{aa, bb, cc, \bar{a}\bar{a}, \bar{b}\bar{b}, \bar{c}\bar{c}, ac, a\bar{b}, b\bar{a}, b\bar{c}, c\bar{b}, ca, \bar{a}\bar{c}, \bar{a}\bar{b}, \bar{b}\bar{a}, \bar{b}\bar{c}, \bar{c}\bar{b}, \bar{c}\bar{a}\} \cdot \Sigma_h^*,$$

et les changements de direction acceptés sont codés par les ensembles de mots de 2-lettres :

$$\begin{aligned} V_G &= \{ab, bc, c\bar{a}, \bar{a}\bar{b}, \bar{b}\bar{c}, \bar{c}a\} = \text{changements de direction d'angle } \pi/3 \text{ vers la gauche;} \\ V_D &= \{a\bar{c}, \bar{c}\bar{b}, \bar{b}\bar{a}, \bar{a}c, cb, ba\} = \text{changements de direction d'angle } \pi/3 \text{ vers la droite;} \\ V_R &= \{a\bar{a}, \bar{a}a, b\bar{b}, \bar{b}b, c\bar{c}, \bar{c}c\} = \text{l'ensemble des pas vers l'arrière (retours).} \end{aligned}$$

En considérant ces ensembles, on peut former l'ensemble complet  $\Sigma_h^{\geq 2}$  des chemins dans le réseau hexagonal. La fonction de poids correspondante  $\delta_h : \Sigma_h^2 \longrightarrow \{-1, 1, 3\}$  est définie par

$$\delta_h(u) = \begin{cases} -1 & \text{si } u \in V_D, \\ 1 & \text{si } u \in V_G, \\ 3 & \text{si } u \in V_R. \end{cases}$$

Cette fonction de poids s'étend à la valuation  $P_h : \Sigma_h^{\geq 1} \longrightarrow \mathbb{Z}$  qui est définie sur les chemins  $w$  de longueur  $n \geq 1$ , par

$$P_h(w) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{n-1} \delta_h(w_i w_{i+1}) & \text{si } n > 1, \\ 0 & \text{si } n = 1. \end{cases} \quad (4.9)$$

Dans ce contexte, la propriété d'additivité est toujours satisfaite et le Théorème 5 s'adapte de manière directe. Ceci entraîne la spécialisation aux chemins non croisants suivante. Précisons d'abord que le plus petit rectangle contenant la région (voir Figure 4.6) est remplacé par le plus petit hexagone convexe (voir Figure 4.9) contenant le chemin fermé avec six points extrémaux contrairement à quatre.

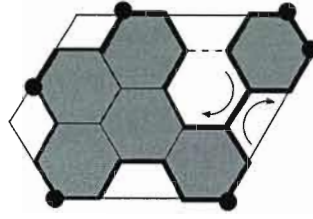


Figure 4.9 Réseau hexagonal régulier

La situation telle que décrite est résumée dans la proposition ci-dessous.

**Proposition 6** Soit  $w = w_1 \cdots w_n \in H$ , alors

- (i)  $P_h(w) \equiv \delta_h(w_1 w_n) \pmod{6}$ ,
- (ii)  $P_h(w) \equiv 0 \pmod{6} \iff w_1 = w_n$ ,
- (iii) dans le cas des chemins non croisants fermés, on a  $P_h(w) = 5$ .

Par exemple, pour le chemin  $w = a\bar{c}a\bar{c}abababcbcb\bar{c}a\bar{c}a\bar{c}a\bar{b}\bar{c}\bar{b}\bar{c}\bar{b}\bar{c}a\bar{c}ababcb\bar{c}a\bar{c}a\bar{b}$  de la Figure 4.10, on a

$$\begin{aligned} P_h(w) &= 10 \equiv \delta_h(w_1 w_n) \pmod{6} \\ &\equiv \delta_h(a\bar{b}) \pmod{6} \\ &\equiv -2 \pmod{6}, \end{aligned}$$

qui montre que (i) est satisfait.



Figure 4.10  $w = a\bar{c}a\bar{c}abababcbcb\bar{c}a\bar{c}a\bar{c}a\bar{b}\bar{c}\bar{b}\bar{c}\bar{b}\bar{c}a\bar{c}ababcb\bar{c}a\bar{c}a\bar{b}$

Notons que  $w_1 w_n = a\bar{b} \notin H$  justifie le fait que  $\delta_h$  doit être définie sur tout l'ensemble  $\Sigma_h^2$ .

De façon triviale, (i) implique (ii). Finalement, on illustre (iii) par le chemin fermé  $w = aba\bar{c}abcbabcb\bar{a}\bar{b}\bar{c}\bar{b}\bar{a}\bar{c}bcb\bar{a}\bar{b}\bar{a}\bar{b}\bar{c}\bar{b}\bar{c}$  de la Figure 4.9 où le point de départ est le point le plus à gauche sur le côté du bas :

$$P_h(w) = 5.$$

Pour les chemins non croissants fermés dans le réseau hexagonal, la propriété de Daurat et Nivat est énoncée comme suit :

**Proposition 7** *Dans une région du plan dont la frontière est délimitée par un chemin non croissant fermé dans le réseau hexagonal, en particulier pour un polyomino hexagonal, le nombre  $S$  de points saillants et le nombre  $R$  de points rentrants sont reliés par la formule*

$$S - R = 6. \quad (4.10)$$

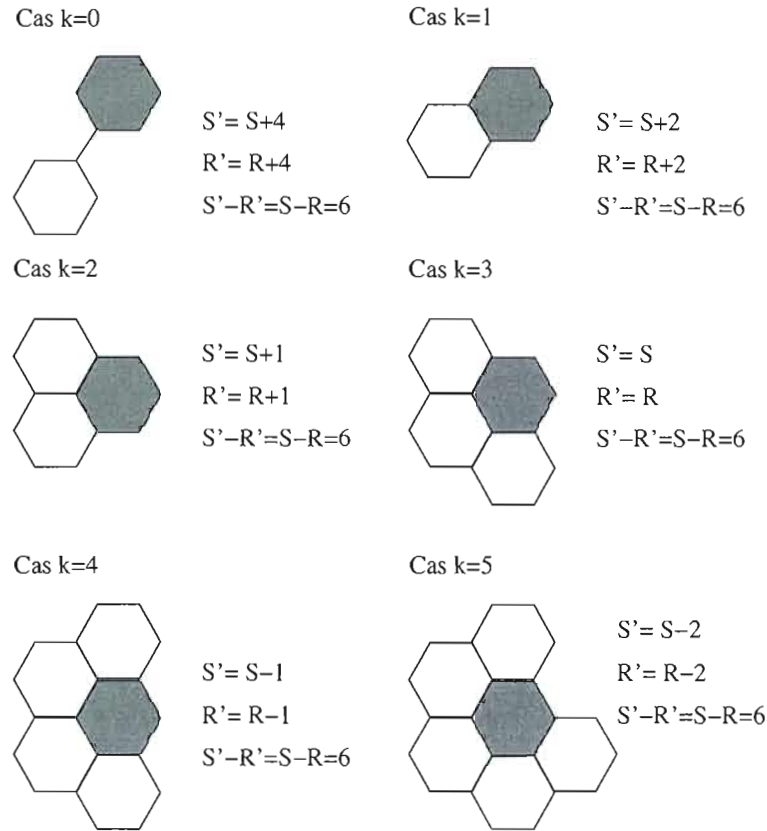
**Preuve.** On peut procéder de façon analogue au cas du réseau carré en considérant alors les six points extrémaux. Cependant, nous allons plutôt utiliser une induction sur le nombre  $n$  de cellules hexagonales, afin de démontrer le résultat.

Pour  $n = 1$ , le résultat est trivial. Supposons que le résultat est vérifié pour une région (sans trou)  $\mathcal{H}$ , constituée de  $n$  hexagones et délimitée par un chemin non croissant orienté positivement. Soit  $S$  le nombre de points saillants de  $\mathcal{H}$  et  $R$  le nombre de points rentrants de  $\mathcal{H}$ .

Considérons maintenant une région  $\mathcal{H}'$  obtenue de  $\mathcal{H}$  en ajoutant un hexagone supplémentaire  $H$  de façon à préserver la simple connexité. Soit  $S'$  le nombre de points saillants de  $\mathcal{H}'$  et  $R'$  le nombre de points rentrants de  $\mathcal{H}'$ .

Dépendamment du nombre  $k$  de cotés communs à  $H$  et  $\mathcal{H}$ , la Figure 4.11 donne localement les relations correspondantes entre  $S$ ,  $R$ ,  $S'$  et  $R'$ . Dans chaque situation, la nouvelle cellule hexagonale ajoutée est représentée en gris alors que les autres sont blanches et on voit que la relation  $S' - R' = 6$  reste toujours vraie.

■



**Figure 4.11** Preuve de  $S - R = 6$  pour les réseaux hexagonaux réguliers.

Plus généralement, pour les régions contenant un nombre  $k$  donné de trous, les deux formules (4.8) et (4.10) s'écrivent respectivement comme

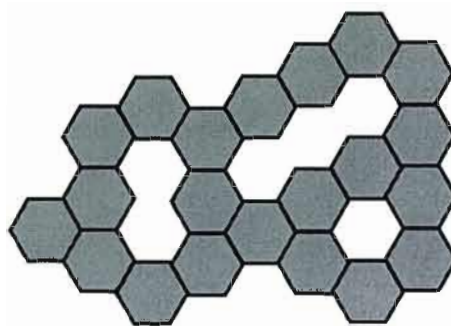
$$S - R = 4 - 4k \quad \text{et} \quad S - R = 6 - 6k.$$

Ceci découle du fait que les trous décrivent des chemins parcourus dans le sens horaire, ce qui signifie que les points saillants et rentrants ont interchangé leurs rôles.

Par exemple, considérons le polyomino possédant 3 trous représentés à la Figure 4.12.

On peut vérifier que le nombre de points saillants est  $S = 24 + 2 + 4 = 30$  et que le nombre de points rentrants est  $R = 18 + 8 + 10 + 6 = 42$ , ce qui donne

$$S - R = 30 - 42 = -12.$$

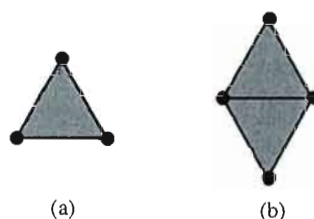


**Figure 4.12** Un polyomino dans le réseau hexagonal ayant trois trous.

De façon équivalente, en appliquant la formule pour les régions contenant  $k$  trous, on obtient le même résultat

$$S - R = 6 - 6(3) = -12.$$

D'une part, comme la formule  $S - R = \text{cste}$  n'est pas satisfaite pour les chemins non croisés fermés d'un réseau triangulaire régulier, il devient relativement simple de voir qu'il n'existe pas d'autres réseaux réguliers possédant une telle propriété. On le voit facilement dans la Figure 4.13, où en (a)  $S - R = 3$  et en (b)  $S - R = 4$ .



**Figure 4.13**  $S - R = \text{cste}$  est faux pour les réseaux triangulaires réguliers.

D'autre part, pour les huit réseaux semi-réguliers classifiés par Kepler (voir Figure 4.14), qui consistent en les réseaux formés d'au moins deux polygones réguliers distincts (Grünbaum et Shephard, 1987; Grünbaum et Shephard, 1989) dont chacun des sommets possède le même motif polygonal cyclique, on peut vérifier que la relation de Daurat et Nivat,  $S - R = \text{cste}$ , est également fausse.

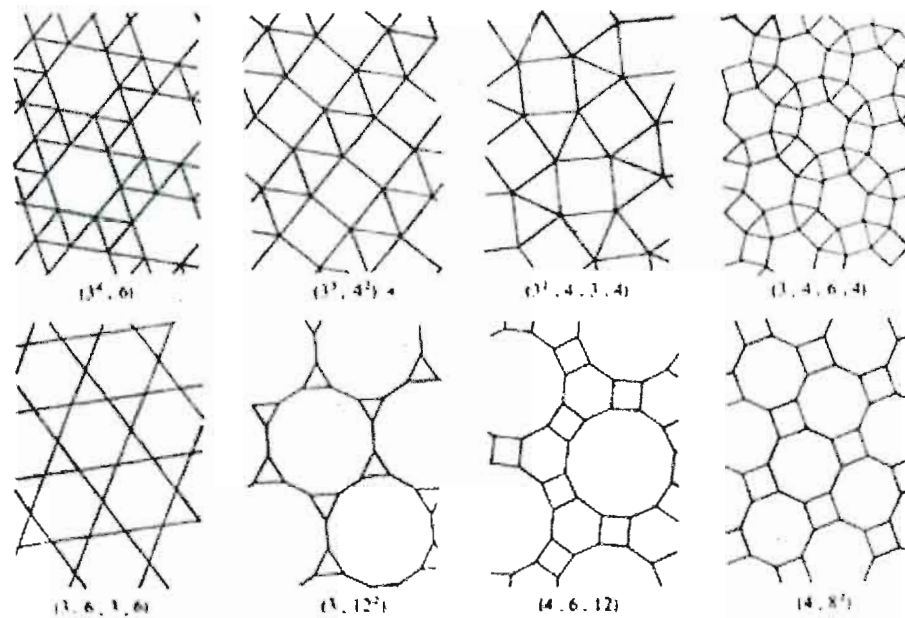


Figure 4.14 Les réseaux semi-réguliers (Grünbaum et Shephard, 1987).

Par exemple, dans le premier réseau semi-régulier (voir Figure 4.14), la Figure 4.15 (a) donne  $S - R = 6$  et la Figure 4.15 (b) donne  $S - R = 0$ .

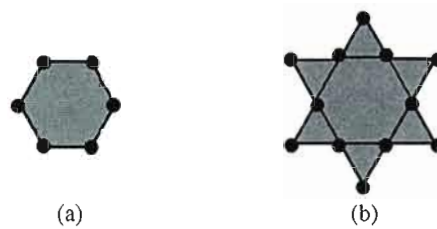


Figure 4.15 Un contre-exemple de  $S - R = \text{cste}$  pour le premier réseau semi-régulier.



### 4.3 Remarques

La valuation  $P$  introduite à la Section 4.1 est de nature géométrique. Elle mesure la variation totale des angles entre le point de départ et le point d'arrivée. En analyse complexe, le *nombre d'enroulements de contour* ou l'*indice* relatif à un point  $z_0$  d'un contour  $\gamma$  est défini par

$$\text{Indice}(\gamma, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{1}{z - z_0} dz,$$

et compte le nombre de fois que le contour  $\gamma$  s'enroule autour du point  $z_0$ .

Cette notion diffère de la nôtre qui est définie aussi pour les contours ouverts. Notons que dans le contexte des nombres complexes, notre valuation  $P$  peut s'écrire comme

$$P(w) = \frac{2 \sum_{k=1}^{n-1} \text{Arg} \left( \frac{w_{k+1}}{w_k} \right)}{\pi},$$

où  $\text{Arg}(z)$  est l'argument principal du nombre complexe  $z \neq 0$  satisfaisant  $-\pi < \text{Arg}(z) \leq \pi$ .

On peut se demander s'il existe des réseaux pour lesquels des formules généralisées du type Daurat et Nivat sont satisfaites, c'est-à-dire,

$$mS - nR = l,$$

pour des entiers  $m, n$  et  $l$ . On pourrait, par exemple, considérer les réseaux définis par un ensemble fini  $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$  de  $k$  vecteurs non nuls linéairement dépendants sur  $\mathbb{N}$ , dans lequel cas les chemins fermés existent. Un problème naturel serait alors de trouver des conditions nécessaires sur les classes associées aux chemins fermés simples, menant à des analogues de la formule de Daurat et Nivat.

## Chapitre V

### OPÉRATIONS DE MÉLANGE SUR LES CHEMINS DISCRETS

Le rôle de ce chapitre est de présenter divers résultats se rapportant à certaines propriétés sur les opérations de *mélange* appliquées aux chemins discrets. Dans un premier temps, l'application de l'opération de *mélange parfait* dans le réseau carré  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  révèle quelques propriétés géométriques intéressantes. Entre autre, les chemins fermés restent fermés, l'aire ainsi que le périmètre doublent et le centre de gravité subit une rotation de  $45^\circ$  avec un facteur de similitude de  $\sqrt{2}$ . On observe également des propriétés d'invariance pour les *courbes du dragon* associées. Dans un deuxième temps, en remplaçant les chemins dans le réseau carré par des chemins formés d'angles de  $2k\pi/N$  et en utilisant des *mélanges* plus généraux, des résultats analogues apparaissent.

Ces résultats ont notamment été présentés dans le cadre de la conférence internationale CANT'06 (8–19 mai 2006, Liège, Belgique) (Brlek, Labelle et Lacasse, 2006b) pour ensuite être publiés sous forme d'une version plus détaillée (Brlek, Labelle et Lacasse, 2008c).

Ce chapitre est organisé de la manière suivante. Dans la Section 5.1.1, on introduit le concept de *mélange parfait* appliqué aux chemins dans le réseau carré. La Section 5.1.2 traite des courbes du type *dragon* associées à des variantes de l'opération de *mélange parfait*. L'étude de certains paramètres reliés à l'itération des *courbes du dragon* est abordée dans la Section 5.1.3. Finalement, la Section 5.2 est dédiée à la généralisation de ces résultats à d'autres types d'opérations de *mélange* appliqués à des chemins formés d'angles de  $2k\pi/N$  pour  $k = 0, \dots, N - 1$ .

## 5.1 Mélanges dans le réseau carré

Pour débiter notre étude, nous considérons d'abord les chemins discrets dans le réseau carré du plan discret  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ . Un chemin discret est alors un chemin polygonal formé de déplacements élémentaires unitaires dans le plan. Comme dans le Chapitre 4, nous utiliserons la représentation des chemins par les mots de changements de direction, suivant l'équation (4.2) du chapitre précédent.

### 5.1.1 Opérations de mélange et mélange parfait

Rappelons d'abord la définition usuelle du *produit de mélange* se référant à Lothaire (Lothaire, 1997). Considérons l'ensemble  $\Sigma = \{a, \bar{a}, b, \bar{b}\}$  des pas élémentaires dans le plan.

**Définition 15** Soit  $u$  et  $v$  deux éléments de  $\Sigma^*$  écrits sous la forme  $u = u_1 u'$  et  $v = v_1 v'$  où  $u_1, v_1 \in \Sigma$ . Le produit de mélange de  $u$  et  $v$ , noté  $u \sqcup v$ , est défini récursivement par

$$u \sqcup v = u_1(u' \sqcup v) + v_1(u \sqcup v'),$$

avec  $\epsilon \sqcup w = w \sqcup \epsilon = w$ , pour tout  $w \in \Sigma^*$ .

Par exemple, si on prend  $u = ab$  et  $v = aab$ , il est possible de vérifier que

$$(ab) \sqcup (aab) = abaab + 3aabab + 6aaabb.$$

Le *mélange parfait* est simplement un cas particulier du produit de mélange, consistant en un terme spécifique de celui-ci.

**Définition 16** Soit  $u$  un mot de longueur  $n + 1$  et  $v$  un mot de longueur  $n$ . Le mélange parfait  $\sqcup^* : \Sigma^{n+1} \times \Sigma^n \longrightarrow \Sigma^*$  de  $u$  et  $v$  est défini par

$$u \sqcup^* v = u_1 v_1 u_2 v_2 \cdots u_n v_n u_{n+1}.$$

### 5.1.2 Opérateur et courbe dragon

Dans le contexte du présent chapitre, le plan cartésien  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  est identifié au plan complexe  $\mathbb{C}$  dans le but de simplifier les notations et les calculs. En particulier, ceci permet d'associer canoniquement à tout chemin polygonal fermé  $w \in \Sigma^*$ , un mot de changements de direction  $f(w) \in \Sigma_d^*$ , où  $\Sigma_d = \{G, A, D, R\}$ , dont les lettres  $G, A, D$  et  $R$  sont interprétées comme des nombres complexes.

**Définition 17** Soit  $z = (z_0, z_1, \dots, z_{m-1})$  où  $z_k = x_k + iy_k$  pour  $k = 0, 1, \dots, m-1$ , la suite des sommets d'un chemin polygonal fermé dans le plan complexe débutant au point  $z_0$ . Le mot de changements de direction de ce chemin est le mot  $d = d_1 d_2 \dots d_{m-1}$  dont les lettres sont des nombres complexes  $d_1, d_2, \dots, d_{m-1}$  donnés par

$$d_1 = \frac{\Delta z_1}{\Delta z_0}, \quad d_2 = \frac{\Delta z_2}{\Delta z_1}, \quad d_3 = \frac{\Delta z_3}{\Delta z_2}, \quad \dots, \quad d_{m-1} = \frac{\Delta z_{m-1}}{\Delta z_{m-2}}, \quad (5.1)$$

où  $\Delta z_k = z_{k+1} - z_k$  et  $z_m = z_0$  par convention.

En d'autres termes, en considérant la normalisation  $z_0 = 0$  et  $z_1 = 1$ , on peut écrire

$$\begin{array}{ll} z_0 &= 0, & \Delta z_0 &= 1. \\ z_1 &= 1, & \Delta z_1 &= d_1, \\ z_2 &= 1 + d_1, & \Delta z_2 &= d_1 d_2, \\ z_3 &= 1 + d_1 + d_1 d_2, & \Delta z_3 &= d_1 d_2 d_3, \\ \dots & & \dots & \\ z_k &= 1 + d_1 + \dots + d_1 d_2 \dots d_{k-1}, & \Delta z_k &= d_1 d_2 \dots d_k, \\ \dots & & \dots & \\ z_{m-1} &= 1 + d_1 + \dots + d_1 d_2 \dots d_{m-2} & \Delta z_{m-1} &= d_1 d_2 \dots d_{m-1}. \end{array} \quad (5.2)$$

Dans le réseau carré  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  identifié à  $\mathbb{Z} + i\mathbb{Z}$ , considérons la suite  $z = (z_0, z_1, \dots, z_{2n-1})$  des sommets où  $z_k = x_k + iy_k$ , pour  $k = 0, 1, \dots, 2n-1$ , d'un chemin fermé  $w \in \Sigma^*$ . En utilisant la fonction  $f : \Sigma^{\geq 2} \longrightarrow \Sigma_d^*$  définie par (4.2),  $w$  peut se réinterpréter comme le mot

$d_1 d_2 \cdots d_{2n-1}$  formé de nombres complexes

$$f(w) = \prod_{i=1}^{2n-1} h(w_i w_{i+1}) \simeq d_1 d_2 \cdots d_{2n-1}$$

sur l'alphabet  $\Sigma_d = \{G, D, A, R\} \simeq \{i, -i, 1, -1\}$ .

Plus précisément,  $G$  est identifié au nombre complexe  $i$  (rotation de  $90^\circ$  vers la gauche),  $D$  au nombre complexe conjugué  $\bar{i} = -i$  (rotation de  $90^\circ$  vers la droite),  $A$  au nombre  $1$  (un pas vers l'avant sans rotation) et  $R$  au nombre  $-1$  (rotation de  $180^\circ$ , pas vers l'arrière).

Dans ce contexte, l'opération de mélange parfait appliquée au mot de changements de direction  $d_1 d_2 \cdots d_{2n-1} \in \{i, -i, 1, -1\}^*$  donne lieu au mot

$$(GD)^n \sqcup^* d_1 d_2 \cdots d_{2n-1} = G d_1 D d_2 G d_3 \cdots G d_{2n-1} D = i d_1 \bar{i} d_2 i d_3 \bar{i} d_4 \cdots i d_{2n-1} \bar{i},$$

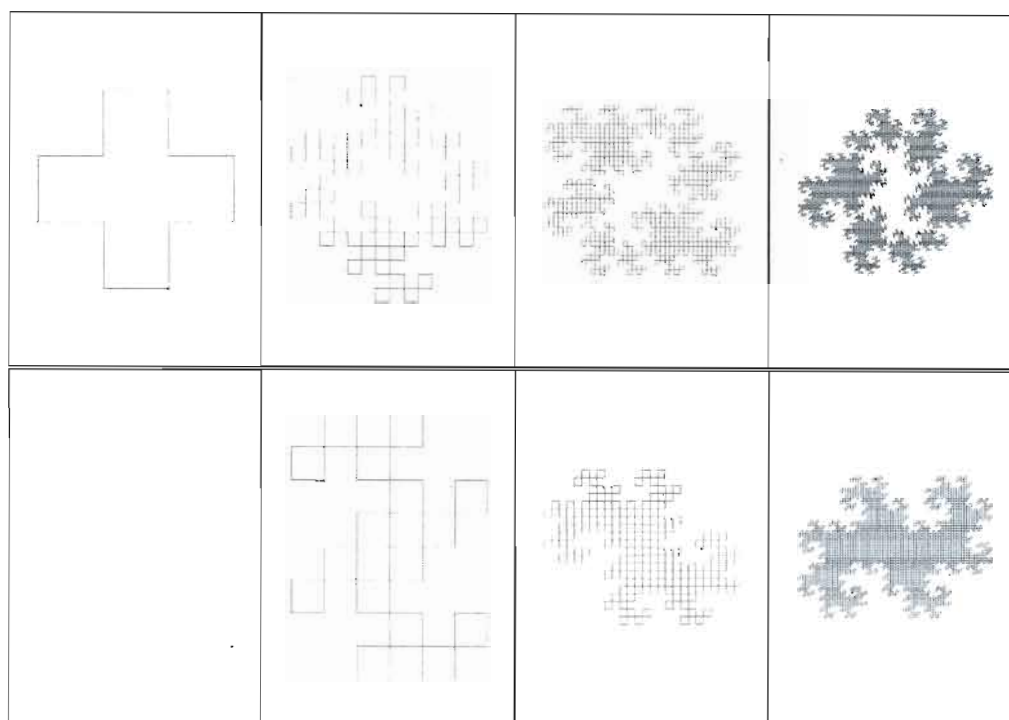
qui constitue également un mot de changements de direction appartenant à  $\{i, -i, 1, -1\}^*$ , associé à un autre chemin polygonal dont les sommets sont  $(\zeta_0, \dots, \zeta_{4n-1})$ . Cette suite de sommets est dénotée  $\zeta = \mathcal{M}(z) = \mathcal{M}(z_0, \dots, z_{2n-1})$ , où  $\mathcal{M}$  est l'opérateur de mélange parfait étendu aux suites de sommets qui est décrit explicitement par les familles d'équations suivantes (en utilisant la multiplication complexe, l'induction et le fait que  $i\bar{i} = 1$ ) :

$$\mathcal{M} : \begin{cases} \zeta_{4k} &= (1+i)z_{2k}, & \Delta\zeta_{4k} &= \Delta z_{2k}, \\ \zeta_{4k+1} &= (1+i)z_{2k} + \Delta z_{2k}, & \Delta\zeta_{4k+1} &= i\Delta z_{2k}, \\ \zeta_{4k+2} &= (1+i)z_{2k+1}, & \Delta\zeta_{4k+2} &= i\Delta z_{2k+1}, \\ \zeta_{4k+3} &= (1+i)z_{2k+1} + i\Delta z_{2k+1}, & \Delta\zeta_{4k+3} &= \Delta z_{2k+1}, \end{cases} \quad (5.3)$$

pour  $k = 0, 1, \dots, n-1$ .

À partir de maintenant, nous utiliserons l'abus de notation qui consiste à identifier tout chemin  $w = w_1 w_2 \cdots w_m$  à la suite  $z = (z_0, z_1, \dots, z_{m-1})$  de ses sommets correspondants.

Un attrait de l'opérateur de mélange parfait  $\mathcal{M}$ , est qu'il peut être itéré. Ses itérations engendrent des chemins fermés prenant l'allure de fractales. Par exemple, la Figure 5.1 montre les itérations 4, 7 et 10 pour la croix  $DGGDGGDGGD$  et le carré  $GGG$ .



**Figure 5.1** Opération de  $\mathcal{M}$  sur la croix et le carré (à changement d'échelle près).

Comme les courbes associées aux itérées de l'opérateur  $\mathcal{M}$  ne tendent pas vers une courbe limite, une certaine normalisation est nécessaire. À cet effet, nous introduisons un nouvel opérateur de *mélange parfait normalisé*, qu'on notera  $\mathcal{D}$ . Celui-ci est défini sur les chemins fermés et ses itérations convergent vers des courbes de type courbe classique du dragon (voir Figure 5.1). De telles itérations ont d'abord été étudiées par les physiciens de la NASA John Heighway, Bruce Banks, et William Harter. Elles ont ensuite été décrites par Martin Gardner dans une de ses chroniques de récréations mathématiques du Scientific American (Gardner, 1967). Plusieurs de leurs propriétés ont été publiées par Chandler Davis et Donald Knuth.

**Définition 18** L'opérateur dragon,  $\mathcal{D}$ , est défini sur les chemins par

$$\mathcal{D} = \frac{1}{1+i} \mathcal{M}.$$

Plus précisément,

$$\mathfrak{D}(z_0, z_1, \dots, z_{2n-1}) = (\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{4n-1}),$$

où

$$\mathfrak{D} : \begin{cases} \xi_{4k} &= z_{2k}, & \Delta \xi_{4k} &= \frac{1}{2}(1-i)\Delta z_{2k}, \\ \xi_{4k+1} &= z_{2k} + \frac{1}{2}(1-i)\Delta z_{2k}, & \Delta \xi_{4k+1} &= \frac{1}{2}(1+i)\Delta z_{2k}, \\ \xi_{4k+2} &= z_{2k+1}, & \Delta \xi_{4k+2} &= \frac{1}{2}(1+i)\Delta z_{2k+1}, \\ \xi_{4k+3} &= z_{2k+1} + \frac{1}{2}(1+i)\Delta z_{2k+1}, & \Delta \xi_{4k+3} &= \frac{1}{2}(1-i)\Delta z_{2k+1}, \end{cases} \quad (5.4)$$

pour  $k = 0, 1, \dots, n-1$ .

### 5.1.3 Comportements réguliers de paramètres géométriques

Afin d'analyser certains paramètres reliés aux opérateurs  $\mathcal{M}$  et  $\mathfrak{D}$ , nous proposons la version complexe suivante du théorème classique de Green que nous avons rencontré précédemment au Chapitre 2. Celle-ci s'avère très avantageuse dans le contexte actuel.

**Théorème 6** Soit  $A(x, y)$  et  $B(x, y)$ , deux fonctions continûment différentiables définies sur un ouvert contenant une région simplement connexe,  $\Omega$ , délimitée par une courbe simple,  $\Gamma$ , orientée positivement. Posons  $\phi(z) = A + iB = A(x, y) + iB(x, y)$ , où  $z = x + iy$ . Alors,

$$\int_{\Gamma} \phi(z) dz = - \iint_{\Omega} \left( \frac{\partial B}{\partial x} + \frac{\partial A}{\partial y} \right) dx dy + i \iint_{\Omega} \left( \frac{\partial A}{\partial x} - \frac{\partial B}{\partial y} \right) dx dy.$$

**Preuve.** Puisque  $\phi(z) dz = (A dx - B dy) + i(B dx + A dy)$ , il suffit d'appliquer deux fois la version réelle classique du théorème de Green. Les détails sont laissés au lecteur. ■

Par exemple, pour  $\phi(z) = \bar{z} = x - iy$ , le conjugué de  $z$ , on a

$$\int_{\Gamma} \bar{z} dz = \iint_{\Omega} (0 + 0) dx dy + i \iint_{\Omega} (1 - (-1)) dx dy = 2i \iint_{\Omega} dx dy = 2ia,$$

où  $a = a(\Gamma)$  désigne l'aire signée de la région  $\Omega$  dont la frontière orientée est  $\Gamma$ .

Il s'ensuit que

$$a(\Gamma) = \frac{1}{2} \Im \int_{\Gamma} \bar{z} du, \quad (5.5)$$

où  $\Im$  désigne la partie imaginaire du nombre complexe  $z$ . En ce qui concerne le centre de gravité et le moment d'inertie, on a les formules

$$g(\Gamma) = \frac{i}{4a} \int_{\Gamma} \bar{z}^2 dz, \quad (5.6)$$

$$I(\Gamma) = \frac{1}{4} \Im \int_{\Gamma} |z|^2 \bar{z} dz - |g|^2 a, \quad (5.7)$$

où  $g = g(\Gamma)$  dénote le centre de gravité vu comme un nombre complexe et  $I = I(\Gamma)$  le moment d'inertie de  $\Omega$ . Plus précisément, on a

$$\begin{aligned} a(\Gamma) &= \frac{1}{2} \int_{\Gamma} (x dy - y dx), \\ g(\Gamma) &= \frac{\iint_{\Omega} x dx dy}{a} + i \frac{\iint_{\Omega} y dx dy}{a}, \\ I(\Gamma) &= \iint_{\Omega} (x^2 + y^2) dx dy - |g|^2 a. \end{aligned}$$

Notons que le centre de gravité et le moment d'inertie sont définis seulement si  $a \neq 0$ .

Afin d'implémenter la version complexe du théorème de Green dans le contexte des chemins polygonaux fermés dont la suite des sommets est  $(z_0, z_1, \dots, z_{m-1})$ , l'intégrale  $\int_{\Gamma} \phi(z) dz$  est évaluée sous forme de somme finie de la façon suivante :

**Lemme 12** Soit  $\Gamma$  le chemin fermé dont la suite des sommets est  $(z_0, \dots, z_{m-1})$ . Posons  $\phi^*(z, s) = \int_0^1 \phi(z + ts) dt$ . Alors,

$$\int_{\Gamma} \phi(z) dz = \sum_{\nu=0}^{m-1} \phi^*(z_{\nu}, \Delta z_{\nu}) \Delta z_{\nu}.$$

**Preuve.** Soit  $z = z_{\nu} + t\Delta z_{\nu}$  et  $dz = \Delta z_{\nu} dt$ . On a alors,

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \phi(z) dz &= \sum_{\nu=0}^{m-1} \int_{[z_{\nu}, z_{\nu+1}]} \phi(z) dz = \sum_{\nu=0}^{m-1} \int_0^1 (\phi(z_{\nu} + t\Delta z_{\nu}) dt) \Delta z_{\nu} \\ &= \sum_{\nu=0}^{m-1} \phi^*(z_{\nu}, \Delta z_{\nu}) \Delta z_{\nu}. \blacksquare \end{aligned}$$



En utilisant le Lemme 12, les formules (5.5) et (5.6) donnant respectivement l'aire et le centre de gravité, prennent les formes suivantes

$$a(\Gamma) = \frac{1}{2} \Im \sum_{\nu=0}^{m-1} \overline{z_\nu} \Delta z_\nu, \quad (5.8)$$

$$g(\Gamma) = \frac{i}{4a} \sum_{\nu=0}^{m-1} \left( z_\nu^2 + z_\nu \Delta z_\nu + \frac{1}{3} (\Delta z_\nu)^2 \right) \overline{\Delta z_\nu}. \quad (5.9)$$

Le comportement des opérateurs  $\mathcal{M}$  et  $\mathcal{D}$  relativement aux aires et aux centres de gravité se résume par le théorème suivant.

**Théorème 7** Soit  $z = (z_0, z_1, \dots, z_{2n-1})$  un chemin fermé du plan complexe constitué de pas unitaires. Alors, les chemins  $\mathcal{M}(z)$  et  $\mathcal{D}(z)$  sont également fermés. De plus,

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad a(\mathcal{M}(z)) &= 2a(z), & \text{(ii)} \quad g(\mathcal{M}(z)) &= (1+i) \cdot g(z), \\ \text{(iii)} \quad a(\mathcal{D}(z)) &= a(z), & \text{(iv)} \quad g(\mathcal{D}(z)) &= g(z), \end{aligned}$$

où  $\mathcal{M}$  et  $\mathcal{D}$  dénote respectivement les opérateurs de mélange parfait et de dragon (voir Figure 5.2).

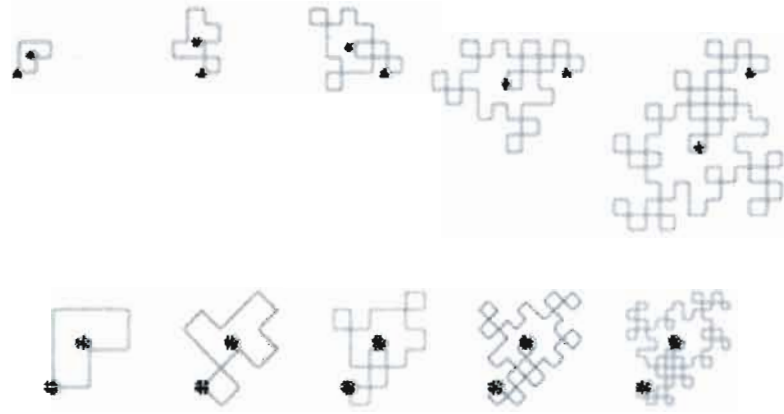


Figure 5.2 Illustration du Théorème 7 :  $\mathcal{M}$  vs  $\mathcal{D}$ .

**Preuve.** Un chemin  $z$  est fermé si et seulement si  $\sum_{\nu=0}^{2n-1} \Delta z_\nu = 0$ . Soit  $\zeta = \mathcal{M}(z)$ . Alors par (5.3), il en découle que

$$\sum_{\nu=0}^{4n-1} \Delta \zeta_\nu = \sum_{k=0}^{n-1} (\Delta z_{2k} + i \Delta z_{2k} + \Delta z_{2k+1} + i \Delta z_{2k+1}) = (1+i) \sum_{\nu=0}^{2n-1} \Delta z_\nu = 0,$$

ce qui démontre bien que  $\mathcal{M}(z)$  est fermé. De façon similaire  $\mathfrak{D}(z)$  est également fermé.

Prouvons maintenant (iii). Par la formule (5.8) appliquée à  $\xi = \mathfrak{D}(z)$  et en utilisant (5.4), on a

$$\begin{aligned} a(\mathfrak{D}(z)) &= \frac{1}{2} \Im \sum_{\nu=0}^{4n-1} \bar{\xi}_\nu \Delta \xi_\nu \\ &= \frac{1}{2} \Im \sum_{k=0}^{n-1} \left( \bar{z}_{2k} \Delta z_{2k} + \overline{z_{2k+1}} \Delta z_{2k+1} + \frac{i}{2} (|\Delta z_{2k}|^2 - |\Delta z_{2k+1}|^2) \right) \\ &= \frac{1}{2} \Im \sum_{\nu=0}^{2n-1} \bar{z}_\nu \Delta z_\nu + \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{n-1} (|\Delta z_{2k}|^2 - |\Delta z_{2k+1}|^2) = a(z) \end{aligned}$$

puisque  $|\Delta z_{2k}| = |\Delta z_{2k+1}| = 1$  pour  $k = 0, 1, \dots, n-1$ .

Similairement, pour (iv), soit  $\Gamma$  le périmètre de  $z$  et  $\mathfrak{D}(\Gamma)$  le périmètre de  $\mathfrak{D}(z)$ . Par la formule (5.9) et en utilisant (5.4), on obtient alors,

$$\begin{aligned} &\int_{\mathfrak{D}(\Gamma)} \bar{\xi}^2 d\xi - \int_{\Gamma} \bar{z}^2 dz \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} i \left( \bar{z}_{2k} |\Delta z_{2k}|^2 - \overline{z_{2k+1}} |\Delta z_{2k+1}|^2 + \frac{1}{2} |\Delta z_{2k}|^2 \overline{\Delta z_{2k}} - \frac{1}{2} |\Delta z_{2k+1}|^2 \overline{\Delta z_{2k+1}} \right) \\ &\quad - \frac{1}{6} \sum_{k=0}^{n-1} (|\Delta z_{2k}|^2 \overline{\Delta z_{2k}} + |\Delta z_{2k+1}|^2 \overline{\Delta z_{2k+1}}) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} i \left( \bar{z}_{2k} - \overline{z_{2k+1}} + \frac{1}{2} \overline{\Delta z_{2k}} - \frac{1}{2} \overline{\Delta z_{2k+1}} \right) - \frac{1}{6} \sum_{k=0}^{n-1} (\overline{\Delta z_{2k}} + \overline{\Delta z_{2k+1}}) \end{aligned}$$

puisque  $|\Delta z_{2k}| = |\Delta z_{2k+1}| = 1$  pour  $k = 0, 1, \dots, n-1$ .

Comme le chemin est fermé, la deuxième somme du membre de droite de la dernière égalité vaut 0 puisque

$$\sum_{k=0}^{n-1} \overline{\Delta z_{2k}} + \overline{\Delta z_{2k+1}} = \sum_{\nu=0}^{2n-1} \overline{\Delta z_\nu} = \bar{0} = 0.$$

La première somme vaut également 0, étant donné qu'elle peut être réécrite comme

$$\frac{i}{2} \sum_{k=0}^{n-1} (\overline{z_{2k}} - \overline{z_{2k+2}}) = \frac{i}{2} ((\overline{z_0} + \overline{z_2} + \cdots + \overline{z_{2n-2}}) - (\overline{z_2} + \cdots + \overline{z_{2n-2}} + \overline{z_{2n}})) = 0$$

puisque  $z_0 = z_{2n}$ .

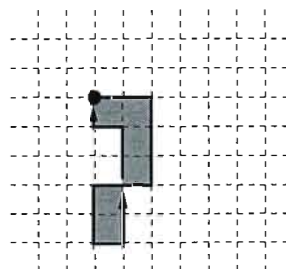
Par (iii) et en utilisant le fait que  $a(\mathfrak{D}(z)) = a(z)$ , on a donc

$$g(\mathfrak{D}(z)) = \frac{i}{4a(\mathfrak{D}(z))} \int_{\mathfrak{D}(\Gamma)} \overline{\xi}^2 d\xi = \frac{i}{4a(\mathfrak{D}(z))} \int_{\Gamma} \overline{z}^2 dz = \frac{i}{4a(z)} \int_{\Gamma} \overline{z}^2 dz = g(z).$$

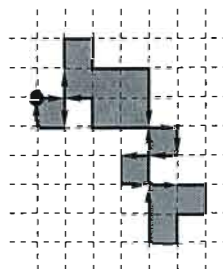
Finalement, (i) et (ii) découlent du fait que  $\mathcal{M}(z) = (1+i)\mathfrak{D}(z)$ , ce qui montre que  $\mathcal{M}(z)$  est obtenu de  $\mathfrak{D}(z)$ , en utilisant une rotation de  $45^\circ$  et un facteur de similitude de  $\sqrt{2} = |1+i|$ . ■

**Exemple.** Soit  $f(w) = ADAADAGAGGAAAGD$  avec  $a(f(w)) = -2$ . Comme attendu et tel que montré dans la figure ci-dessous, on trouve

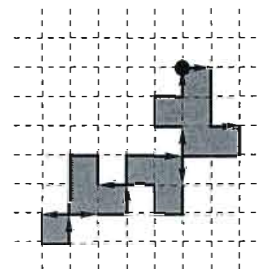
$$a((GD)^8 \sqcup^* f(w)) = a((DG)^8 \sqcup^* f(w)) = -4.$$



$f(w) = ADAADAGAGGAAAGD$



$(GD)^8 \sqcup^* f(w)$



$(DG)^8 \sqcup^* f(w)$

## 5.2 Extension à des mélanges plus généraux

Dans la section précédente, il était question de chemins dans le réseau carré avec des changements de direction de  $0^\circ, 90^\circ, 180^\circ$  et  $270^\circ$  ainsi que des mélanges très particuliers, menant à des courbes du type de dragon classique. À partir de maintenant, nous allons explorer des changements de direction plus généraux formés d'angles  $2k\pi/N$  pour  $k = 0, \dots, N-1$  et de familles d'opérations de mélange et de dragon qui leurs sont associées. Une attention particulière est portée sur la recherche de conditions sur ces opérateurs préservant l'aire et le centre de gravité de chemins fermés polygonaux se rapportant à ces nouveaux types de changements de direction.

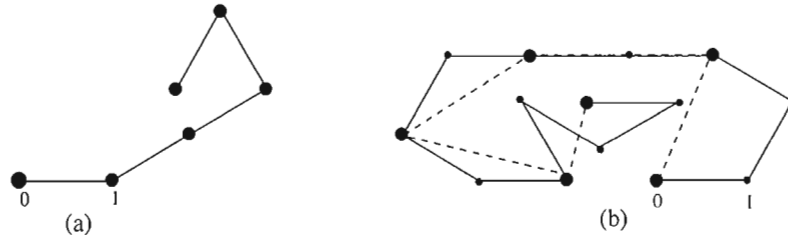
### 5.2.1 Mélange de mots et chemins liés aux racines de l'unité

Soit  $\omega = e^{2\pi i/N}$  une racine primitive  $N$ -ième de l'unité et remplaçons simultanément les alphabets  $\Sigma$  et  $\Sigma_d$  considérés ci-haut par

$$\Sigma = \Sigma_d = \{1, \omega, \omega^2, \dots, \omega^{N-1}\}.$$

Les chemins et les changements de direction correspondants sont simplement des mots sur ce nouvel alphabet pour lesquels les formules (5.1) et (5.2) sont vérifiées. La suite des sommets des chemins polygonaux est dénotée par  $z = (z_0, z_1, \dots, z_{n-1})$ , et on constate que ces nouveaux chemins sont tous *équilatéraux* au sens où chacun de leurs pas sont de même longueur, c'est-à-dire  $|z_{i+1} - z_i| = |\Delta z_i| = \text{cste}$  ( $= 1$  dans le cas présent), pour  $i = 0 \dots n-1$  et  $z_0 = z_n$  dans le cas des chemins fermés.

Par exemple, soit  $N = 12$  et  $\Sigma = \Sigma_d = \{1, \omega, \omega^2, \dots, \omega^{11}\}$  où  $\omega = e^{2\pi i/12}$ , et soit le mot de changements de direction  $d = \omega 1 \omega^3 \omega^4 \in \Sigma_d^*$ . Le chemin polygonal correspondant est représenté à la Figure 5.3 (a).



**Figure 5.3** Les chemins (a)  $d = \omega 1 \omega^3 \omega^4$ ; (b)  $\delta \sqcup^* d = \omega^2 \omega^3 \cdot 1 \cdot \omega^2 \cdot \omega \cdot \omega^7 \omega^2 \omega^5 \sqcup^* d$ .

Considérons  $d = d_1 d_2 \dots d_{n-1} \in \Sigma_d^*$  le mot de changements de direction associé à un chemin polygonal équilatéral dont la suite des sommets est  $z = (z_0, z_1, \dots, z_{n-1})$ . Soit  $\delta \in \Sigma_d^*$  un autre mot et *fixons* une factorisation de celui-ci en sous-mots possiblement vides :

$$\delta = \delta_0 \cdot \delta_1 \cdot \delta_2 \dots \delta_{n-1}, \quad \delta_k \in \Sigma_d^*, \quad (5.10)$$

où  $\cdot$  désigne la concaténation et chacun des sous-mots  $\delta_k$ , de longueur  $m_k \geq 0$  est donné par

$$\delta_k = \delta_{k,1} \dots \delta_{k,m_k}, \quad \delta_{k,j} \in \Sigma_d. \quad (5.11)$$

La factorisation (5.10) donne lieu à un nouveau mélange parfait généralisé, noté également  $\sqcup^*$ , et défini par

$$\delta \sqcup^* d = \delta_0 \cdot d_1 \cdot \delta_1 \cdot d_2 \cdot \delta_2 \cdot d_3 \cdots \delta_{n-2} \cdot d_{n-1} \cdot \delta_{n-1}.$$

Notons que  $\delta \sqcup^* d$  consiste encore en un seul terme du produit de mélange usuel  $\delta \sqcup d$  comme dans la Section 5.1.1. En utilisant la normalisation  $z_0 = 0$ ,  $z_1 = 1$ , ce nouveau mot est le mot de changements de direction d'un autre chemin polygonal  $\zeta = \mathcal{M}(z)$  avec  $\zeta_0 = 0$  et  $\zeta_1 = 1$ .

Par exemple, soit  $N = 12$  et l'alphabet  $\Sigma_d = \{1, \omega, \omega^2, \dots, \omega^{11}\}$  où  $\omega = e^{2\pi i/12}$ . Considérons le mot  $d = \omega 1 \omega^3 \omega^4 \in \Sigma_d^*$ , qui est représenté par le chemin de la Figure 5.3 (a), ainsi que la factorisation  $\delta = \omega^2 \omega^3 \cdot 1 \cdot \omega^2 \cdot \omega \cdot \omega^7 \omega^2 \omega^5$ . L'application du mélange parfait à  $\delta$  et  $d$  donne le nouveau mot

$$\begin{aligned} \delta \sqcup^* d &= (\omega^2 \omega^3 \cdot 1 \cdot \omega^2 \cdot \omega \cdot \omega^7 \omega^2 \omega^5) \sqcup^* (\omega 1 \omega^3 \omega^4) \\ &= (\omega^2 \omega^3) \cdot \omega \cdot (1) \cdot 1 \cdot (\omega^2) \cdot \omega^3 \cdot (\omega) \cdot \omega^4 \cdot (\omega^7 \omega^2 \omega^5), \end{aligned}$$

qui correspond au chemin de la Figure 5.3 (b).

On observe que dans la Figure 5.3 (b) les plus gros points, mis-à-part le premier qui est toujours nul, correspondent à la lecture des lettres  $d_k$  du mot  $d = \omega 1 \omega^3 \omega^4$  dans le nouveau mot  $\delta \sqcup^* d$  pour  $k = 1, \dots, n-1$ . On remarque également que le polygone représenté en pointillé dans la Figure 5.3 (b), dont les sommets sont précisément ces gros points, ne possède pas la même forme que le polygone original de la Figure 5.3 (a).

### 5.2.2 Opérateur dragon généralisé

Dans cette section, nous déterminons des conditions sur la factorisation (5.10), à savoir

$$\delta = \delta_0 \cdot \delta_1 \cdot \delta_2 \cdots \delta_{n-1}, \quad \delta_k \in \Sigma_d^*,$$

nous assurant que pour tout chemin polygonal fermé  $z = (z_0, \dots, z_m)$ , le chemin correspondant  $\zeta = \mathcal{M}(z)$  est également fermé. De plus, ces conditions doivent permettre la définition d'un opérateur dragon associé  $\mathfrak{D}(z)$  et donner lieu à un comportement régulier de la forme

$$a(\mathcal{M}(z)) = s \cdot a(z),$$

$$g(\mathcal{M}(z)) = t \cdot g(z),$$

où  $s \in \mathbb{R}$  et  $t \in \mathbb{C}$  sont des constantes indépendantes de  $z$ .

**Définition 19** *Un opérateur dragon  $\mathcal{D}$  associé à une factorisation  $\delta$  donnée par (5.10) et (5.11) est une transformation de la forme*

$$\xi = \mathcal{D}(z) = \kappa \cdot \mathcal{M}(z),$$

où  $\mathcal{M}$  est l'opérateur de mélange parfait associé et  $\kappa \in \mathbb{C}$ , qui dépend de la factorisation, est une constante telle que le polygone  $z$  apparaît comme un sous-polygone de  $\xi$ . Plus précisément,

$$\xi_0 = z_0 = 0,$$

$$\xi_{m_0+1} = z_1 = 1,$$

$$\xi_{m_0+m_1+2} = z_2,$$

$$\dots$$

$$\xi_{m_0+m_1+\dots+m_{n-2}+n-1} = z_{n-1}.$$

Notons que ces conditions sur la factorisation  $\delta$  sont très restrictives.

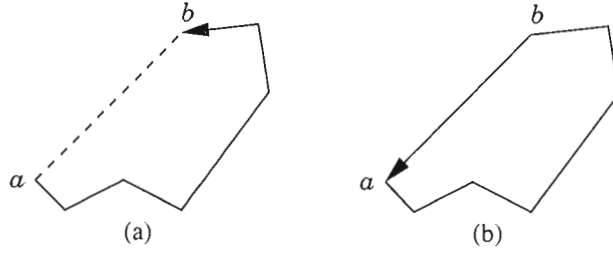
Afin d'étudier les déformations *locales* dues à l'effet de l'opérateur dragon sur les côtés successifs d'un chemin polygonal, nous introduisons la notion d'*oreille* définie comme suit.

**Définition 20** *Considérons un segment orienté  $[a, b]$  dans le plan complexe. Une  $[a, b]$ -oreille est un chemin  $\varepsilon$  dont la suite des sommets*

$$(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m, \alpha_{m+1}), \quad m \geq 0,$$

satisfait  $\alpha_0 = a$  et  $\alpha_{m+1} = b$  (voir Figure 5.4 (a)).

Le nombre complexe  $b - a$  est appelé l'ouverture de l'oreille  $\varepsilon$  et est dénoté  $\tilde{\varepsilon}$ . De plus, la fermeture d'une oreille  $\varepsilon$  consiste au chemin fermé  $\varepsilon^\circ$  ayant  $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m, \alpha_{m+1}, \alpha_0)$  comme suite de sommets (voir Figure 5.4 (b)).



**Figure 5.4** (a) Une  $[a, b]$ -oreille  $\varepsilon$  et (b) sa fermeture correspondante  $\varepsilon^\cup$ .

Notons qu'un chemin polygonal fermé correspond à une oreille d'ouverture 0. De plus, toute  $[a, b]$ -oreille  $\varepsilon$  (respectivement  $\varepsilon^\cup$ ) avec  $a \neq b$ , peut se normaliser en une  $[0, 1]$ -oreille, c'est-à-dire,  $T_{a,b} \varepsilon$  (resp  $T_{a,b} \varepsilon^\cup$ ), à l'aide d'une transformation de la forme

$$T_{a,b} : z \rightarrow \frac{z - a}{b - a},$$

et plus généralement en une  $[a', b']$ -oreille où  $a', b'$  sont des nombres complexes arbitraires distincts. En particulier, tout mot  $\gamma = \gamma_1 \gamma_2 \cdots \gamma_m \in \Sigma_d^*$  donne lieu à une oreille correspondante  $\varepsilon = \varepsilon(\gamma)$  dont la suite des sommets est

$$(0, 1, 1 + \gamma_1, 1 + \gamma_1 + \gamma_1 \gamma_2, \dots, 1 + \gamma_1 + \gamma_1 \gamma_2 + \cdots + \gamma_1 \gamma_2 \cdots \gamma_m)$$

et dont l'ouverture est  $\tilde{\varepsilon} = \tilde{\varepsilon}(\gamma) = 1 + \gamma_1 + \gamma_1 \gamma_2 + \cdots + \gamma_1 \gamma_2 \cdots \gamma_m$ .

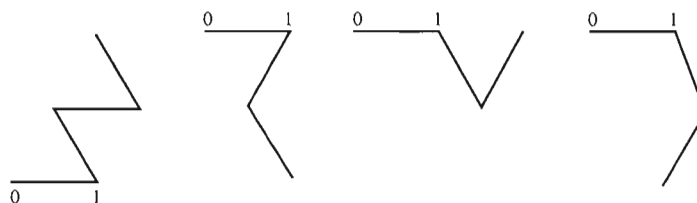
Afin de représenter un opérateur dragon et les oreilles qui lui sont associées, posons à titre d'exemple,  $N = 12$ . Nous allons voir que la factorisation  $\delta = \delta_0 \cdot \delta_1 \cdot \delta_2 \cdot \delta_3 \in \Sigma_d^*$  où

$$\delta_0 = \omega^4 \omega^8 \omega^4, \quad \delta_1 = \omega^8 \omega^2, \quad \delta_2 = \omega^{10} \omega^4, \quad \delta_3 = \omega^{10} \omega^{10},$$

admet alors un opérateur dragon.

En effet, ceci peut être vu par l'exemple suivant. Soit le chemin polygonal équilatéral fermé  $z = (z_0, z_1, z_2, z_3)$  correspondant au mot  $d = \omega^3 \omega^3 \omega^3 \in \Sigma_d^*$  (voir Figure 5.6 (a)) et soit les oreilles  $\varepsilon(\delta_0), \varepsilon(\delta_1), \varepsilon(\delta_2), \varepsilon(\delta_3)$  associées respectivement aux sous-mots  $\delta_0, \delta_1, \delta_2, \delta_3$ , représentées par les chemins de la Figure 5.5.

Le mélange  $\zeta = \mathcal{M}(z)$  est illustré à la Figure 5.6 (b).



**Figure 5.5** Les oreilles  $\varepsilon(\delta_0), \varepsilon(\delta_1), \varepsilon(\delta_2), \varepsilon(\delta_3)$  associées aux sous-mots  $\delta_0, \delta_1, \delta_2, \delta_3$ .

Concernant la situation générale pour obtenir une courbe du dragon, l'analyse va comme suit.

On considère un polygone équilatéral fermé  $z = (z_0, z_1, \dots, z_{n-1}, z_0)$ , avec  $z_0 = 0, z_1 = 1$ .

À l'aide de transformations affines adéquates, on colle les oreilles

$$\varepsilon(\delta_0), \varepsilon(\delta_1), \dots, \varepsilon(\delta_k), \dots, \varepsilon(\delta_{n-1})$$

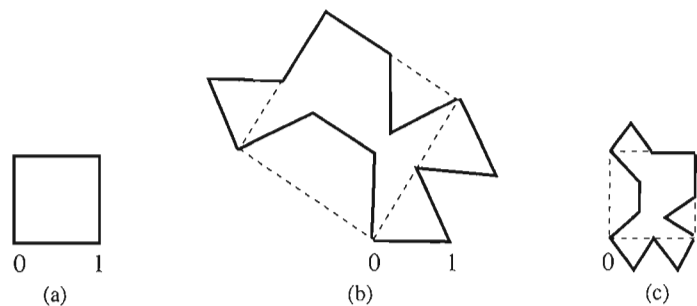
sur les côtés successifs correspondants

$$[z_0, z_1], [z_1, z_2], \dots, [z_k, z_{k+1}], \dots, [z_{n-1}, z_0],$$

pour ainsi obtenir les oreilles  $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1}$  satisfaisant aux conditions ci-dessous

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad \varepsilon_k &= z_k + (\Delta z_k) \varepsilon(\delta_k) / \check{\varepsilon}(\delta_k), \\ \text{(ii)} \quad \check{\varepsilon}_k &= \Delta z_k, \\ \text{(iii)} \quad |\check{\varepsilon}_k| &= |\Delta z_k| = 1, \end{aligned} \tag{5.12}$$

pour  $k = 0, 1, \dots, n-1$ . La Figure 5.6 (c) illustre cette situation dans le contexte de l'exemple précédent.



**Figure 5.6** Chemin polygonal : (a) original fermé  $z$  (b)  $\mathcal{M}(z)$  (c)  $\mathcal{D}(z)$ .



On en déduit les conditions nécessaires suivantes pour l'existence de l'opérateur dragon  $\mathcal{D}$

$$\kappa = \frac{1}{\check{\varepsilon}(\delta_0)}, \quad \mathcal{D}(z) = \frac{1}{\check{\varepsilon}(\delta_0)} \mathcal{M}(z)$$

et

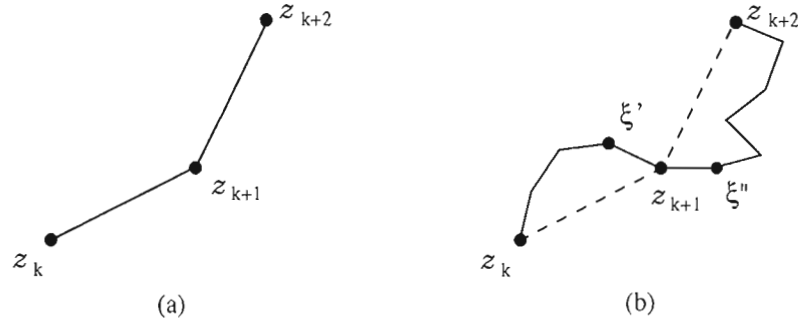
$$|\check{\varepsilon}(\delta_0)| = |\check{\varepsilon}(\delta_1)| = \cdots = |\check{\varepsilon}(\delta_{n-1})|, \quad (5.13)$$

où  $|\gamma|$  dénote le module du nombre complexe  $\gamma$ . Notons que le polygone  $\mathcal{M}(z)$  est semblable au polygone  $\mathcal{D}(z)$  puisque qu'il est obtenu par une homothétie (multiplication par le nombre complexe  $1/\check{\varepsilon}(\delta_0)$ ).

Poursuivons maintenant notre étude en analysant les changements de direction lors du passage, à travers un point commun, entre les chemins  $z$  et  $\mathcal{D}(z)$ . Pour ce faire, considérons  $z_k, z_{k+1}$  et  $z_{k+2}$ , trois sommets consécutifs du chemin initial  $z$  (voir Figure 5.7 (a)) où

$$d_{k+1} = \frac{z_{k+2} - z_{k+1}}{z_{k+1} - z_k},$$

et considérons les trois sommets  $\xi', z_{k+1}, \xi''$  consécutifs de  $\xi = \mathcal{D}(z)$  correspondants (voir Figure 5.7 (b)).



**Figure 5.7** Trois sommets consécutifs : (a) de  $z$  ; (b) de  $\xi = \mathcal{D}(z)$ .

À la lecture du mot  $\delta \sqcup^* d$ , lorsqu'on atteint la lettre  $d_{k+1}$ , l'égalité suivante doit également être satisfaite

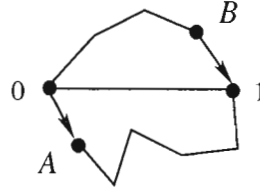
$$d_{k+1} = \frac{\xi'' - z_{k+1}}{z_{k+1} - \xi'}.$$

Autrement dit, on doit avoir

$$\frac{z_{k+1} - \xi'}{z_{k+1} - z_k} = \frac{\xi'' - z_{k+1}}{z_{k+2} - z_{k+1}},$$

ce qui est équivalent, dans le contexte des  $[0, 1]$ -oreilles à l'égalité  $A = 1 - B$  (voir Figure 5.8), où

$$A = \frac{\xi'' - z_{k+1}}{z_{k+2} - z_{k+1}} \quad \text{et} \quad B = \frac{\xi' - z_k}{z_{k+1} - z_k}.$$



**Figure 5.8** Les  $[0, 1]$ -oreilles correspondantes.

Quelques calculs mènent à

$$A = \frac{1}{\tilde{\varepsilon}(\delta_{k+1})},$$

$$B = \frac{1 + \delta_{k,1} + \delta_{k,1}\delta_{k,2} + \cdots + \delta_{k,1}\delta_{k,2} \cdots \delta_{k,m_k-1}}{\tilde{\varepsilon}(\delta_k)} = 1 - \frac{\delta_{k,1}\delta_{k,2} \cdots \delta_{k,m_k}}{\tilde{\varepsilon}(\delta_k)}.$$

La condition  $A = 1 - B$  équivaut à dire que les conditions

$$\tilde{\varepsilon}(\delta_k) = \delta_{k,1}\delta_{k,2} \cdots \delta_{k,m_k}\tilde{\varepsilon}(\delta_{k+1}) \in \mathbb{C}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1, \quad \delta_n = \delta_0, \quad (5.14)$$

doivent être vérifiées.

Pour simplifier l'écriture des conditions (5.14), définissons la relation binaire  $\prec$  sur les mots  $\alpha, \beta \in \Sigma_d^*$  par

$$\alpha \prec \beta \iff \tilde{\varepsilon}(\alpha) = \alpha_1\alpha_2 \cdots \alpha_p \tilde{\varepsilon}(\beta) \in \mathbb{C},$$

où  $\alpha = \alpha_1\alpha_2 \cdots \alpha_p$ . Les conditions (5.14) peuvent donc se réécrire comme

$$\delta_0 \prec \delta_1 \prec \cdots \prec \delta_k \prec \cdots \prec \delta_{n-1} \prec \delta_0. \quad (C1)$$

Notons que (C1) implique la condition (5.13), c'est-à-dire  $|\tilde{\varepsilon}(\delta_0)| = |\tilde{\varepsilon}(\delta_1)| = \cdots = |\tilde{\varepsilon}(\delta_{n-1})|$ .

**Lemme 13** *Si la factorisation  $\delta = \delta_0 \cdot \delta_1 \cdot \delta_2 \cdots \delta_{n-1}$  satisfait la condition (C1), alors  $\mathcal{M}$  transforme tout chemin fermé en un chemin fermé et*

$$\mathfrak{D}(z) = \frac{1}{\tilde{\varepsilon}(\delta_0)} \mathcal{M}(z)$$

*est un opérateur dragon bien défini.*

**Preuve.** Il reste seulement à montrer que les chemins fermés sont transformés en chemins fermés. En premier lieu, considérons l'exemple suivant avec  $n = 3$ . Soit  $d = d_1 d_2 \in \Sigma_d^*$  et  $\delta = \delta_0 \delta_1 \delta_2 \in \Sigma_d^*$ , où

$$\delta_0 = \delta_{0,1} \delta_{0,2}.$$

$$\delta_1 = \delta_{1,1},$$

$$\delta_2 = \delta_{2,1} \delta_{2,2} \delta_{2,3}.$$

Le fait que le chemin  $z = (z_0, z_1, z_2, z_0)$  soit fermé est équivalent à  $\check{\varepsilon}(d) = 1 + d_1 + d_1 d_2 = 0$ .

On a,

$$\delta \sqcup^* d = (\delta_{0,1} \delta_{0,2}) \cdot d_1 \cdot (\delta_{1,1}) \cdot d_2 \cdot (\delta_{2,1} \delta_{2,2} \delta_{2,3})$$

et les sommets de  $\mathcal{M}(z)$  sont les nombres complexes  $(\zeta_0, \zeta_1, \dots, \zeta_9)$ . Il est aisé de montrer que

$$\begin{aligned} \zeta_0 &= 0, \\ \zeta_1 &= 1, \\ \zeta_2 &= 1 + \delta_{0,1}, \\ \zeta_3 &= \check{\varepsilon}(\delta_0), \\ \zeta_4 &= \check{\varepsilon}(\delta_0) + \delta_{0,1} \delta_{0,2} d_1, \\ \zeta_5 &= \check{\varepsilon}(\delta_0)(1 + d_1), \\ \zeta_6 &= \check{\varepsilon}(\delta_0) + \check{\varepsilon}(\delta_0) d_1 + \delta_{0,1} \delta_{0,2} d_1 \delta_{1,1} d_2, \\ \zeta_7 &= \check{\varepsilon}(\delta_0) + \check{\varepsilon}(\delta_0) d_1 + \delta_{0,1} \delta_{0,2} d_1 \delta_{1,1} d_2 + \delta_{0,1} \delta_{0,2} d_1 \delta_{1,1} d_2 \delta_{2,1}, \\ \zeta_8 &= \check{\varepsilon}(\delta_0) + \check{\varepsilon}(\delta_0) d_1 + \delta_{0,1} \delta_{0,2} d_1 \delta_{1,1} d_2 + \delta_{0,1} \delta_{0,2} d_1 \delta_{1,1} d_2 \delta_{2,1} \\ &\quad + \delta_{0,1} \delta_{0,2} d_1 \delta_{1,1} d_2 \delta_{2,1} \delta_{2,2}, \\ \zeta_9 &= \check{\varepsilon}(\delta_0)(1 + d_1 + d_1 d_2) = \check{\varepsilon}(\delta_0) \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

Dans le cas général, on observe le même type de comportement et on a donc

$$\check{\varepsilon}(\delta_0)(1 + d_1 + d_1 d_2 + \dots + d_1 d_2 \dots d_{n-1}) = \check{\varepsilon}(\delta_0) \cdot 0 = 0. \blacksquare$$

### 5.2.3 Conditions pour un comportement régulier de paramètres

Avant d'énoncer le résultat principal de la présente section (Théorème 8) concernant le comportement des principaux paramètres géométriques associés à l'opérateur dragon  $\mathfrak{D}$ , quelques

lemmes préalables sont nécessaires. Ces lemmes traitent des oreilles, de propriétés d'additivité de l'aire et du centre de gravité, ainsi que de l'existence des courbes de type dragon.

**Lemme 14** Soit  $z$  un chemin polygonal fermé et  $\xi = \mathfrak{D}(z)$ . Alors,

$$\int_z f(u) du = \int_\xi f(u) du$$

si et seulement si

$$\sum_{k=0}^{n-1} \int_{\varepsilon_k^{\zeta}} f(u) du = 0$$

où  $\varepsilon_k$  désigne la  $[z_k, z_{k+1}]$ -oreille associée à  $\mathfrak{D}$ , pour  $k = 0, 1, \dots, n-1$  (voir Figure 5.6 (c)).

**Preuve.** Les deux chemins  $\xi$  et  $z$  se décomposent comme suit

$$\begin{aligned} \xi &= \varepsilon_0 + \varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_{n-1} \\ z &= [z_0, z_1] + [z_1, z_2] + \dots + [z_{n-2}, z_{n-1}] + [z_{n-1}, z_0]. \end{aligned}$$

On conclut directement en remarquant que,

$$\begin{aligned} \int_\xi f - \int_z f &= \left( \int_{\varepsilon_0} f - \int_{[z_0, z_1]} f \right) + \left( \int_{\varepsilon_1} f - \int_{[z_1, z_2]} f \right) \\ &\quad + \dots + \left( \int_{\varepsilon_{n-1}} f - \int_{[z_{n-1}, z_0]} f \right) \\ &= \int_{\varepsilon_0^{\zeta}} f + \int_{\varepsilon_1^{\zeta}} f + \dots + \int_{\varepsilon_{n-1}^{\zeta}} f. \blacksquare \end{aligned}$$

Le lemme suivant consiste en une version complexe d'un résultat classique à propos du centre de gravité d'objets composés (Feynman, Leighton et Sands, 1963).

**Lemme 15** Considérons deux chemins polygonaux fermés  $p_1, p_2$ , partageant un côté commun dans des directions opposées. Soit  $p = p_1 + p_2$  le chemin polygonal obtenu en supprimant ce côté commun. Alors,

$$a(p) = a(p_1) + a(p_2), \quad g(p) = \frac{a(p_1)g(p_1) + a(p_2)g(p_2)}{a(p_1) + a(p_2)}$$

pourvu que  $a(p_1) \neq 0$ ,  $a(p_2) \neq 0$  et  $a(p_1) + a(p_2) \neq 0$ .

**Preuve.** Le résultat découle des suites d'égalités

$$a(p) = \frac{1}{2} \Im \int_p \bar{u} du = \frac{1}{2} \Im \left( \int_{p_1} \bar{u} du + \int_{p_2} \bar{u} du \right) = a(p_1) + a(p_2)$$

et

$$\begin{aligned} g(p) &= \frac{i}{4a(p)} \overline{\int_p \bar{u}^2 du} = \frac{i}{4a(p)} \left( \overline{\int_{p_1} \bar{u}^2 du} + \overline{\int_{p_2} \bar{u}^2 du} \right) \\ &= \frac{i}{4a(p)} \left( \frac{4a(p_1)}{i} g(p_1) + \frac{4a(p_2)}{i} g(p_2) \right) \\ &= \frac{a(p_1)g(p_1) + a(p_2)g(p_2)}{a(p)} \\ &= \frac{a(p_1)g(p_1) + a(p_2)g(p_2)}{a(p_1) + a(p_2)}. \blacksquare \end{aligned}$$

Le lemme suivant décrit l'effet d'un opérateur dragon sur les chemins fermés.

**Lemme 16** *Soit  $z$  un chemin polygonal fermé, alors on a*

$$(i) \quad a(\mathfrak{D}(z)) = a(z) + \sum_{k=0}^{n-1} a(\varepsilon_k^\circ),$$

$$(ii) \quad g(\mathfrak{D}(z)) = \frac{a(z)g(z) + \sum_{k=0}^{n-1} a(\varepsilon_k^\circ)g(\varepsilon_k^\circ)}{a(z) + \sum_{k=0}^{n-1} a(\varepsilon_k^\circ)}.$$

**Preuve.** Il suffit de remarquer que  $\mathfrak{D}(z) = z + \sum_{k=0}^{n-1} \varepsilon_k^\circ$  et d'appliquer le Lemme 15.  $\blacksquare$

Voici maintenant un lemme décrivant l'aire et le centre de gravité d'oreilles fermées correspondant à des mots arbitraires de  $\Sigma_d^*$ .

**Lemme 17** *Soit  $\gamma = \gamma_1 \cdots \gamma_m \in \Sigma_d^*$  et  $\varepsilon^\circ(\gamma)$  son oreille fermée associée dont la suite des sommets est  $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{m+1}, \alpha_0)$  où  $\alpha_0 = 0$ ,  $\alpha_1 = 1$  et  $\alpha_k = 1 + \gamma_1 + \gamma_1\gamma_2 + \dots + \gamma_1\gamma_2 \cdots \gamma_{k-1}$ . Alors l'aire signée de  $\varepsilon^\circ(\gamma)$  est donnée par*

$$(i) \quad a(\varepsilon^\circ(\gamma)) = \frac{1}{2} \Im \sum_{1 \leq i \leq j \leq m} \gamma_{i \cdots j} \in \mathbb{R}$$

où  $\gamma_{i \cdots j} = \gamma_i \gamma_{i+1} \cdots \gamma_j \in \mathbb{C}$ .

De plus, le centre de gravité signé de  $\varepsilon^\circ(\gamma)$  est donné par

$$(ii) \quad g(\varepsilon^\circ(\gamma)) = \frac{1}{3} \frac{\sum_{\nu=1}^m (\alpha_\nu + \alpha_{\nu+1}) \Im \sum_{j=1}^\nu \gamma_{j \cdots \nu}}{\Im \sum_{1 \leq i \leq j \leq m} \gamma_{i \cdots j}} \in \mathbb{C}.$$

**Preuve.** (i) Par la formule de base (5.8) donnant l'aire, on a

$$\begin{aligned}
 a(\varepsilon^\cup(\gamma)) &= \frac{1}{2} \Im \sum_{j=0}^{m+1} \overline{\alpha_j} \Delta \alpha_j \\
 &= \frac{1}{2} \Im \left( \sum_{j=1}^m (1 + \overline{\gamma_1} + \overline{\gamma_1 \gamma_2} + \cdots + \overline{\gamma_1 \gamma_2 \cdots \gamma_{j-1}} + \cdots + \overline{\gamma_1 \gamma_2 \cdots \gamma_{j-1}}) \gamma_1 \cdots \gamma_j \right. \\
 &\quad \left. - (1 + \overline{\gamma_1} + \overline{\gamma_1 \gamma_2} + \cdots + \overline{\gamma_1 \cdots \gamma_m}) (1 + \gamma_1 + \gamma_1 \gamma_2 + \cdots + \gamma_1 \cdots \gamma_m) \right) \\
 &= \frac{1}{2} \Im \left( \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^j \gamma_i \gamma_{i+1} \cdots \gamma_j \right) \\
 &= \frac{1}{2} \Im \sum_{1 \leq i \leq j \leq m} \gamma_i \cdots \gamma_j.
 \end{aligned}$$

(ii) Pour  $k = 1, 2, \dots, m$ , soit  $p_k$  un triangle de sommets  $\alpha_0, \alpha_k, \alpha_{k+1}$ , alors l'oreille fermée  $\varepsilon^\cup(\gamma)$  s'écrit comme la somme de ces chemins triangulaires orientés  $\varepsilon^\cup(\gamma) = p_0 + p_1 + \cdots + p_m$ .

Par le Lemme 15, on a

$$g(\varepsilon^\cup(\gamma)) = \frac{a(p_1)g(p_1) + a(p_2)g(p_2) + \cdots + a(p_m)g(p_m)}{a(p_1) + a(p_2) + \cdots + a(p_m)}$$

et on conclut en utilisant (i) et le fait que

$$g(p_k) = \frac{1}{3}(\alpha_0 + \alpha_k + \alpha_{k+1}) = \frac{\alpha_k + \alpha_{k+1}}{3}. \blacksquare$$

Ce dernier lemme permettra de simplifier la démonstration du théorème principal.

**Lemme 18** *Considérons deux suites de constantes complexes  $q_0, q_1, \dots, q_{n-1}$  et  $r_0, r_1, \dots, r_{n-1}$  satisfaisant*

$$q_k - r_k + r_{k-1} = 0, \quad \text{pour } k = 0, 1, \dots, n-1,$$

*où par convention  $r_{-1} = r_{n-1}$ . Alors, pour tout chemin fermé  $z$ , avec  $z_0 = z_n$ , on a*

$$\sum_{k=0}^{n-1} (q_k z_k + r_k \Delta z_k) = 0.$$

**Preuve.** Comme  $z_0 = z_n$ , on a

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=0}^{n-1} r_k \Delta z_k &= \sum_{k=0}^{n-1} r_k (z_{k+1} - z_k) \\
 &= \sum_{k=0}^{n-1} r_k z_{k+1} - \sum_{k=0}^{n-1} r_k z_k \\
 &= \sum_{k=0}^{n-1} r_{k-1} z_k - \sum_{k=0}^{n-1} r_k z_k \\
 &= \sum_{k=0}^{n-1} (r_{k-1} - r_k) z_k.
 \end{aligned}$$

D'où,

$$\sum_{k=0}^{n-1} (q_k z_k + r_k \Delta z_k) = \sum_{k=0}^{n-1} (q_k + r_{k-1} - r_k) z_k = 0. \blacksquare$$

Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer notre résultat principal donnant des conditions qui entraînent la préservation de l'aire et du centre de gravité sous l'opérateur dragon.

**Théorème 8** Soit  $\delta = \delta_0 \cdot \delta_1 \cdot \delta_2 \cdots \delta_{n-1} \in \Sigma_d^*$  une factorisation satisfaisant la condition (C1), c'est-à-dire  $\delta_0 \prec \delta_1 \prec \cdots \prec \delta_{n-1} \prec \delta_0$ . Si cette factorisation vérifie

$$\sum_{k=0}^{n-1} a(\varepsilon^\cup(\delta_k)) = 0, \quad (C2)$$

où

$$a(\varepsilon^\cup(\delta_k)) = \frac{1}{2} \Im \sum_{1 \leq i \leq j \leq m} \gamma_{i \cdots j} \in \mathbb{R},$$

alors pour tout chemin fermé  $z$ , on trouve  $a(\mathcal{D}(z)) = a(z)$ .

De plus, si la condition supplémentaire suivante est satisfaite

$$\begin{aligned} a(\varepsilon^\cup(\delta_k)) \left( 1 - \frac{1}{\tilde{\varepsilon}(\delta_k)} g(\varepsilon^\cup(\delta_k)) \right) \\ + a(\varepsilon^\cup(\delta_{k-1})) \frac{g(\varepsilon^\cup(\delta_{k-1}))}{\tilde{\varepsilon}(\delta_{k-1})} = 0, \quad k = 0, \dots, n-1, \end{aligned} \quad (C3)$$

où  $g(\varepsilon^\cup(\delta_k))$  est donné par le Lemme 17 (ii) alors  $g(\mathcal{D}(z)) = g(z)$ .

**Preuve.** Par le Lemme 16 (i), on a les équivalences

$$\begin{aligned} a(\mathcal{D}(z)) = a(z) &\iff \sum_{k=0}^{n-1} a(\varepsilon_k^\cup) = 0 \\ &\iff \sum_{k=0}^{n-1} a(\varepsilon^\cup(\delta_k)) = 0 \end{aligned}$$

puisque

$$a(\varepsilon_k^\cup) = \frac{1}{|\tilde{\varepsilon}(\delta_k)|^2} a(\varepsilon^\cup(\delta_k)), \quad k = 0, \dots, n-1$$

et que les nombres  $|\tilde{\varepsilon}(\delta_k)|$  sont indépendants de  $k$ .

Pour le centre de gravité  $g(\mathcal{D}(z))$ , le Lemme 16 (ii) donne

$$\begin{aligned}
 g(\mathcal{D}(z)) = g(z) &\iff \frac{a(z)g(z) + \sum_{k=0}^{n-1} a(\varepsilon_k^\cup)g(\varepsilon_k^\cup)}{a(z) + \sum_{k=0}^{n-1} a(\varepsilon_k^\cup)} = g(z) \\
 &\iff \frac{a(z)g(z) + \sum_{k=0}^{n-1} a(\varepsilon_k^\cup)g(\varepsilon_k^\cup)}{a(z)} = g(z) \quad (\text{par C2}) \\
 &\iff g(z) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a(\varepsilon_k^\cup)}{a(z)} g(\varepsilon_k^\cup) = g(z) \\
 &\iff \sum_{k=0}^{n-1} a(\varepsilon_k^\cup)g(\varepsilon_k^\cup) = 0.
 \end{aligned}$$

Cependant, par (5.12 (i)), on a

$$\varepsilon_k = z_k + \Delta z_k \varepsilon(\delta_k) / \tilde{\varepsilon}(\delta_k).$$

D'où l'on tire, en prenant le centre de gravité de part et d'autre,

$$g(\varepsilon_k^\cup) = z_k + \frac{\Delta z_k}{\tilde{\varepsilon}(\delta_k)} g(\varepsilon^\cup(\delta_k)).$$

Ce qui implique que l'égalité

$$\sum_{k=0}^{n-1} a(\varepsilon_k^\cup)g(\varepsilon_k^\cup) = 0$$

est équivalente à l'égalité

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left( a(\varepsilon^\cup(\delta_k))z_k + \frac{a(\varepsilon^\cup(\delta_k))g(\varepsilon^\cup(\delta_k))}{\tilde{\varepsilon}(\delta_k)} \Delta z_k \right) = 0.$$

On conclut en faisant appel au Lemme 18 avec

$$q_k = a(\varepsilon^\cup(\delta_k)) \quad \text{et} \quad r_k = \frac{a(\varepsilon^\cup(\delta_k))g(\varepsilon^\cup(\delta_k))}{\tilde{\varepsilon}(\delta_k)}. \blacksquare$$

**Corollaire 5** *Sous les conditions (C1), (C2) et (C3), l'opérateur de mélange parfait  $\mathcal{M}$  satisfait*

$$\begin{aligned}
 a(\mathcal{M}(z)) &= |\tilde{\varepsilon}(\delta_0)|^2 a(z), \\
 g(\mathcal{M}(z)) &= \tilde{\varepsilon}(\delta_0) g(z),
 \end{aligned}$$

*pour tout chemin polygonal fermé  $z = (z_0, z_1, \dots, z_{n-1}, z_0)$ .*



### 5.2.4 Courbes limites généralisées du dragon

Afin de définir les courbes limites associées à un opérateur dragon  $\mathfrak{D}$  il est nécessaire de pouvoir itérer cet opérateur comme dans la Section 5.1. Pour ce faire, considérons une factorisation fixe de la forme

$$\beta = \beta_0 \cdot \beta_1 \cdots \beta_{p-1},$$

où  $\beta_k = \beta_{k,1} \cdots \beta_{k,m_k} \in \Sigma_d^*$  et tel que  $p$  divise  $m_0 + m_1 + \cdots + m_{p-1}$ .

Pour tout mot

$$d = d_1 \cdots d_{p^{n-1}} \quad (5.15)$$

considérons le mélange parfait  $\delta \sqcup^* d = \beta^n \sqcup^* d$ , associé à la factorisation

$$\delta = \beta^n = \beta_0 \cdot \beta_1 \cdots \beta_{p-1} \cdot \beta_0 \cdot \beta_1 \cdots \beta_{p-1} \cdots \beta_0 \cdot \beta_1 \cdots \beta_{p-1}.$$

Le mélange parfait définit un opérateur de mélange parfait  $\mathcal{M}$  sur les chemins polygonaux fermés  $z = (z_0, z_1, \cdots, z_{p^n-1})$  associés à des mots de la forme (5.15). Il est plutôt simple de voir que  $\zeta = \mathcal{M}(z)$  possède  $n[(m_0 + 1) + \cdots + (m_{p-1} + 1)]$  côtés. Alors, puisque  $p$  divise  $m_0 + m_1 + \cdots + m_{p-1}$ , on a

$$\zeta = (\zeta_0, \zeta_1, \cdots, \zeta_{p^N-1}),$$

où  $N = \frac{(m_0+1)+\cdots+(m_{p-1}+1)}{p}$  est un entier.

On peut donc itérer  $\mathcal{M}$  sur les chemins polygonaux contenant un multiple de  $p$  côtés. Étant donné un chemin polygonal fermé  $z = (z_0, z_1, \cdots, z_{p^n-1})$  on peut aussi itérer

$$\mathfrak{D} = \frac{1}{\tilde{\varepsilon}(\beta_0)} \mathcal{M}$$

par la formule

$$\mathfrak{D}^k(z) = \frac{1}{(\tilde{\varepsilon}(\beta_0))^k} \mathcal{M}^k(z).$$

La courbe dragon associée à  $\beta$  et  $z$  est la courbe limite de suite  $\mathfrak{D}^k(z)$ , lorsque  $k$  tend vers l'infini.

### 5.3 Remarques

Il existe une infinité de familles de courbes de dragon émergeant de factorisations de la forme

$$\beta = \beta_0 \cdot \beta_1 \cdots \beta_{p-1},$$

qui satisfont aux conditions (C1), (C2), (C3) et telles que  $p$  divise  $m_0 + \cdots + m_{p-1}$ .

Comme le lecteur peut vérifier, nous avons une telle famille pour  $p = 2$  : prenons  $\beta = \beta_0 \cdot \beta_1$  où

$$\begin{aligned}\beta_0 &= \lambda = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_m \in \Sigma_d^*, \\ \beta_1 &= \bar{\lambda} = \bar{\lambda}_m \bar{\lambda}_{m-1} \cdots \bar{\lambda}_1 \in \Sigma_d^*\end{aligned}$$

est le conjugué (dans  $\mathbb{C}$ ) de l'image miroir de  $\lambda$ . Le cas étudié dans la Section 5.1 pour le réseau carré correspond au choix spécial  $\beta_0 = G = i$  et  $\beta_1 = D = -i = \bar{i}$ .

Dans un autre ordre d'idées, étant donné deux fonctions  $P(z, \bar{z})$  et  $Q(z, \bar{z})$ , polynomiales en  $z$  et  $\bar{z}$ , on peut introduire un opérateur  $\Omega = \Omega_{P,Q}$ , défini sur les chemins fermés  $z = (z_0, z_1, \dots, z_{n-1}, z_0)$  par

$$\Omega_{P,Q}(z) = \sum_{\nu=0}^{n-1} P(z_\nu, \bar{z}_\nu) \Delta z_\nu + Q(z_\nu, \bar{z}_\nu) \Delta \bar{z}_\nu, \quad z_n = z_0.$$

On peut se poser la question générale suivante. Quelles sont les conditions suffisantes à ajouter à un opérateur dragon  $\mathfrak{D}$  assurant l'égalité

$$\Omega_{P,Q}(\mathfrak{D}(z)) = \Omega_{P,Q}(z),$$

pour tout chemin équilatéral fermé  $z$  ?

## Chapitre VI

### GÉNÉRALISATION AUX DIMENSIONS SUPÉRIEURES

La présente section décrit une approche pour généraliser à plusieurs dimensions les algorithmes développés précédemment dans le Chapitre 2 qui faisaient appel à une version discrète du théorème de Green.

#### 6.1 Théorème de Stokes

Notre outil de base est le théorème de Stokes (Spivak, 1965) dont l'une des versions qui est exploitée dans le présent chapitre, nous est amplement suffisante et s'énonce comme suit :

**Théorème 9** *Soit  $\omega$  une  $(k-1)$ -forme différentielle et  $K$  une  $k$ -surface dans  $\mathbb{R}^n$ . Alors,*

$$\int_K d\omega = \int_{\partial K} \omega,$$

où  $\partial K$  désigne le bord orienté de  $K$  et  $d$  est l'opérateur de différentielle extérieure.

Dans cet énoncé, il est implicitement supposé que  $\omega$  est suffisamment différentiable et que  $K$  est suffisamment lisse. De plus, une  $(k-1)$ -forme différentielle  $\omega$  s'écrit sous la forme standard

$$\omega = \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_{k-1} \leq n} \omega_{j_1, \dots, j_{k-1}}(x_1, \dots, x_n) dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_{k-1}}$$

et  $d\omega$  désigne sa différentielle extérieure qui est une  $k$ -forme décrite comme

$$d\omega = \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_{k-1} \leq n} (d\omega_{j_1, \dots, j_{k-1}}(x_1, \dots, x_n)) \wedge dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_{k-1}}$$

où  $df(x_1, \dots, x_n) = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n$ .

Explicitement, suite à quelques manipulations on obtient,

$$d\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} (d\omega)_{i_1, \dots, i_k}(x_1, \dots, x_n) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$$

où la composante  $(d\omega)_{i_1, \dots, i_k}$  est la fonction de  $(x_1, \dots, x_n)$ , donnée par

$$(d\omega)_{i_1, \dots, i_k} = \sum_{\nu=1}^k (-1)^{\nu-1} \frac{\partial \omega_{i_1, \dots, \widehat{i_\nu}, \dots, i_k}}{\partial x_{i_\nu}},$$

en considérant les formules générales

$$dx_j \wedge dx_i = -dx_i \wedge dx_j.$$

En pratique, pour une famille de  $N$  cartes locales (disjointes) recouvrant  $\partial K$ , on a

$$x_j^{[\nu]} = x_j^{[\nu]}(t_1, \dots, t_{k-1}), \quad j = 1, \dots, n, \quad \nu = 1, \dots, N$$

où  $(t_1, \dots, t_{k-1}) \in U^{[\nu]} \subseteq \mathbb{R}^{k-1}$ .

Alors,  $\int_{\partial K} \omega$  se calcule de la façon suivante,

$$\begin{aligned} & \int_{\partial K} \omega \\ &= \sum_{\nu=1}^N \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_{k-1} \leq n} \int_{U^{[\nu]}} \omega(x_{j_1}^{[\nu]}(\mathbf{t}), \dots, x_{j_{k-1}}^{[\nu]}(\mathbf{t})) \det \left( \frac{\partial(x_{j_1}^{[\nu]}, \dots, x_{j_{k-1}}^{[\nu]})}{\partial(t_1, \dots, t_{k-1})} \right) dt \end{aligned}$$

où  $\mathbf{t} = (t_1, \dots, t_{k-1})$ ,  $d\mathbf{t} = dt_1 \dots dt_{k-1}$  et  $\partial(x_{j_1}^{[\nu]}, \dots, x_{j_{k-1}}^{[\nu]})/\partial(t_1, \dots, t_{k-1})$  désigne la matrice jacobienne

$$\frac{\partial(x_{j_1}^{[\nu]}, \dots, x_{j_{k-1}}^{[\nu]})}{\partial(t_1, \dots, t_{k-1})} = \left[ \frac{\partial x_{j_\alpha}^{[\nu]}(t_1, \dots, t_{k-1})}{\partial t_\beta} \right]_{1 \leq \alpha, \beta \leq k-1}.$$

L'intégrale  $\int_K d\omega$  se calcule de façon similaire à partir de cartes locales recouvrant la  $k$ -surface  $K$ .

Une des propriétés fondamentales de la différentiation extérieure est sans aucun doute,

$$d^2 = 0,$$

qui signifie que pour toute forme différentielle  $\omega$ , on a  $d(d\omega) = 0$ .

**Définition 21** Soit  $\omega$  une forme différentielle. Si  $d\omega = 0$ , alors on dit que  $\omega$  est fermée. De plus, s'il existe une autre forme  $\eta$  telle que  $\omega = d\eta$ , on dit alors que  $\omega$  est exacte.

En conséquence, le résultat suivant s'obtient assez directement.

**Lemme 19** Si  $\omega$  est exacte alors  $\omega$  est fermée.

**Preuve.**  $\omega = d\eta \implies d\omega = dd\eta = d^2\eta = 0$  car  $d^2 = 0$ . ■

Inversement, le lemme de Poincaré énonce que la réciproque est vraie sous certaines conditions. Dans le cadre de cet ouvrage, la version du lemme de Poincaré (Spivak, 1965), telle qu'énoncée ci-dessous sera largement suffisante.

**Lemme 20** Si  $\omega$  est fermée et définie sur un ouvert étoilé de  $\mathbb{R}^n$  alors  $\omega$  est exacte. Autrement dit,

$$\omega = d\eta \iff d\omega = 0.$$

Notons qu'un ensemble  $K$  est dit étoilé s'il existe un point  $u \in K$  tel que pour tout  $x \in K$ , le segment  $[u, x]$  soit inclus dans  $K$ . Dans ce cas, on dit que  $K$  est étoilé par rapport à  $u$ . Remarquons que tout ensemble convexe est étoilé par rapport à n'importe lequel de ses points mais que l'inverse est faux en général. Par exemple, l'étoile classique régulière à cinq pointes est étoilée par rapport à son centre mais n'est pas convexe.

Nous présentons ici une adaptation détaillée d'une preuve élémentaire du lemme de Poincaré, inspirée de Golberg (Goldberg, 1998).

**Preuve.** Sans perte de généralité, par une translation adéquate, on peut supposer que l'ouvert  $U$  est étoilé par rapport à l'origine. Ainsi, pour tout  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in U$  et tout  $t$  tel que  $0 \leq t \leq 1$ , on a  $t\mathbf{x} = (tx_1, \dots, tx_n) \in U$ . Afin d'établir l'implication, nous allons construire un opérateur linéaire  $h$ , appelé opérateur d'homotopie :

$$h : \wedge^k(U) \rightarrow \wedge^{k-1}(U),$$

tel que  $dh + hd = \text{id}$  et où  $\wedge^k(U)$  désigne l'espace vectoriel des  $k$ -formes différentielles sur  $U$ .

Ceci établira le résultat. En effet, en posant  $\eta = h\omega$ , où  $\omega$  est fermée, on aura

$$d\eta = dh\omega = dh\omega + 0 = dh\omega + hd\omega = (dh + hd)\omega = \text{id}\omega = \omega,$$

puisque  $d\omega = 0$ . Prenons donc  $\omega$  une forme différentielle

$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \omega_{i_1, \dots, i_k}(\mathbf{x}) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k},$$

telle que  $d\omega = 0$ , c'est-à-dire qui est fermée, et définissons  $h\omega$  par

$$h\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \sum_{\nu=1}^k (-1)^{\nu-1} \int_0^1 t^{k-1} \omega_{i_1, \dots, i_k}(t\mathbf{x}) dt \cdot x_{i_\nu} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge \widehat{dx_{i_\nu}} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}.$$

D'une part, en faisant appel au symbole de *Kronecker*  $\delta_i^j$ , on a

$$\begin{aligned} dh\omega &= \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \sum_{\nu=1}^k \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} (-1)^{\nu-1} \int_0^1 t^{k-1} \omega_{i_1, \dots, i_k}(t\mathbf{x}) dt x_{i_\nu} dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge \widehat{dx_{i_\nu}} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \\ &= \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \sum_{\nu=1}^k \sum_{j=1}^n (-1)^{\nu-1} \int_0^1 t^{k-1} \frac{\partial \omega_{i_1, \dots, i_k}}{\partial x_j}(t\mathbf{x}) dt x_{i_\nu} dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge \widehat{dx_{i_\nu}} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \\ &\quad + \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \sum_{\nu=1}^k \sum_{j=1}^n (-1)^{\nu-1} \int_0^1 t^{k-1} \omega_{i_1, \dots, i_k}(t\mathbf{x}) dt \delta_j^{i_\nu} dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge \widehat{dx_{i_\nu}} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \\ &= \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \sum_{\nu=1}^k \sum_{j=1}^n (-1)^{\nu-1} \int_0^1 t^k \frac{\partial \omega_{i_1, \dots, i_k}}{\partial x_j}(t\mathbf{x}) dt x_{i_\nu} dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge \widehat{dx_{i_\nu}} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \\ &\quad + \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \sum_{\nu=1}^k (-1)^{\nu-1} \int_0^1 t^{k-1} \omega_{i_1, \dots, i_k}(t\mathbf{x}) dt dx_{i_\nu} \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge \widehat{dx_{i_\nu}} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \\ &= \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \sum_{\nu=1}^k \sum_{j=1}^n (-1)^{\nu-1} \int_0^1 t^k \frac{\partial \omega_{i_1, \dots, i_k}}{\partial x_j}(t\mathbf{x}) dt x_{i_\nu} dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge \widehat{dx_{i_\nu}} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \\ &\quad + \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} k \int_0^1 t^{k-1} \omega_{i_1, \dots, i_k}(t\mathbf{x}) dt dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}. \end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} d\omega &= \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \left( \sum_{j=1}^n \frac{\partial \omega_{i_1, \dots, i_k}(\mathbf{x})}{\partial x_j} dx_j \right) \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \\ &= \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \sum_{j=1}^n \frac{\partial \omega_{i_1, \dots, i_k}(\mathbf{x})}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}. \end{aligned}$$

Pour unifier la notation posons  $i_0 = j$ . On a,

$$hd\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \sum_{i_0=1}^n \sum_{\nu=0}^k (-1)^\nu \int_0^1 t^{k+1-\nu} \frac{\partial \omega_{i_1, \dots, i_k}(t\mathbf{x})}{\partial x_{i_0}} dt \cdot x_{i_\nu} dx_{i_0} \wedge \dots \wedge \widehat{dx_{i_\nu}} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}.$$

En séparant le cas  $\nu = 0$  des cas  $1 \leq \nu \leq k$  et en revenant à l'indice  $j$  (au lieu de  $i_0$ ), on obtient

$$\begin{aligned} hd\omega &= \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \sum_{j=1}^n \int_0^1 t^k \frac{\partial \omega_{i_1, \dots, i_k}(t\mathbf{x})}{\partial x_j} dt x_j dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \\ &\quad - \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \sum_{j=1}^n \sum_{\nu=1}^k (-1)^{\nu-1} \int_0^1 t^k \frac{\partial \omega_{i_1, \dots, i_k}(t\mathbf{x})}{\partial x_j} dt x_{i_\nu} dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge \widehat{dx_{i_\nu}} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}. \end{aligned}$$

Il s'ensuit que,

$$\begin{aligned} dh\omega + hd\omega &= \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \left( k \int_0^1 t^{k-1} \omega_{i_1, \dots, i_k}(t\mathbf{x}) dt + \sum_{j=1}^n \int_0^1 t^k \frac{\partial \omega_{i_1, \dots, i_k}(t\mathbf{x})}{\partial x_j} (t\mathbf{x}) x_j dt \right) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \\ &= \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t} [t^k \omega_{i_1, \dots, i_k}(t\mathbf{x})] dt \cdot dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \\ &= \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \omega_{i_1, \dots, i_k}(\mathbf{x}) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \\ &= \omega \quad (\text{si } k > 0). \blacksquare \end{aligned}$$

Cette propriété du lemme de Poincaré entraîne que toute forme différentielle  $\omega$  fermée, sur un ouvert  $U$  quelconque, est localement exacte. C'est-à-dire que pour chaque point  $p \in U$ , il existe une boule ouverte  $B_p$  (donc étoilée) et une forme  $\eta_p$  définie sur  $B_p$  telle que  $\omega|_{B_p} = d\eta_p$ .

Voici un exemple classique pour lequel la réciproque du lemme de Poincaré est fautive. Prenons l'ouvert non étoilé  $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ , c'est-à-dire le plan  $\mathbb{R}^2$  privé de l'origine. Montrons que la 1-forme différentielle  $\omega = \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$ , définie sur cet ouvert, est fermée mais non exacte.

En premier lieu,

$$\begin{aligned}
 d\omega &= d\left(-\frac{y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy\right) \\
 &= d\left(-\frac{y}{x^2+y^2}\right) \wedge dx + d\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) \wedge dy \\
 &= \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{y}{x^2+y^2}\right)dx + \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{y}{x^2+y^2}\right)dy\right) \wedge dx + \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)dx + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)dy\right) \wedge dy \\
 &= \left(\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{y}{x^2+y^2}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)\right) dx \wedge dy \\
 &= \left(\left(\frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2y^2}{(x^2+y^2)^2}\right) + \left(\frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2x^2}{(x^2+y^2)^2}\right)\right) dx \wedge dy \\
 &= 0 \, dx \wedge dy \\
 &= 0,
 \end{aligned}$$

ce qui démontre bien que  $\omega$  est fermée.

Dans un deuxième temps, montrons par l'absurde, que la forme  $\omega$  n'est pas exacte. Supposons qu'il existe une 0-forme,  $\eta = \eta(x, y)$  définie sur  $U$  telle que  $\omega = d\eta$ . Considérons un cercle  $C$  de rayon 1 centré à l'origine et calculons  $\int_C \omega$  de deux manières.

Cas 1 : calcul direct de l'intégrale en posant  $x = \cos t$ ,  $y = \sin t$ ,  $dx = -\sin t \, dt$ ,  $dy = \cos t \, dt$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ .

On a,

$$\begin{aligned}
 \int_C \omega &= \int_C \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} \\
 &= \int_0^{2\pi} \frac{(\cos t)(\cos t)dt - (\sin t)(-\sin t)dt}{\cos^2 t + \sin^2 t} \\
 &= \int_0^{2\pi} dt = 2\pi.
 \end{aligned}$$



Cas 2 : calcul à partir de l'hypothèse  $\omega = d\eta$ .

On a,

$$\begin{aligned}
 \int_C \omega &= \int_C d\eta \\
 &= \int_C \left( \frac{\partial \eta}{\partial x} dx + \frac{\partial \eta}{\partial y} dy \right) \\
 &= \int_0^{2\pi} \left( \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) (\cos t, \sin t) (-\sin t) dt + \left( \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) (\cos t, \sin t) \cos t dt \\
 &= \int_0^{2\pi} \frac{d(\eta(\cos t, \sin t))}{dt} dt \\
 &= \eta(\cos t, \sin t) \Big|_{t=0}^{t=2\pi} = \eta(1, 0) - \eta(1, 0) = 0.
 \end{aligned}$$

Par la suite, nous supposerons que toutes les formes différentielles sont définies partout dans  $\mathbb{R}^n$ . De ce fait, comme  $\mathbb{R}^n$  est étoilé, les hypothèses du lemme de Poincaré seront donc toujours implicitement satisfaites.

## 6.2 Vers une discrétisation du théorème de Stokes

Rappelons que notre objectif est de traduire le théorème de Stokes dans un cadre discret pour ensuite y adapter nos algorithmes de calculs développés au Chapitre 2. Une première étape vers cette discrétisation consiste à se ramener au cas où  $K$  est un hypercube dans  $\mathbb{R}^n$ , qui s'apparente au cas limite d'un hypercube à coins arrondis. Dans ce contexte, Mansfield et Hydon (Mansfield et Hydon, 2007) ont remplacé les formes différentielles

$$\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \omega_{i_1, \dots, i_k}(x_1, \dots, x_n) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k},$$

où  $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ , par des formes *de différences*

$$\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \omega_{i_1, \dots, i_k}(x_1, \dots, x_n) \Delta_{i_1} \wedge \dots \wedge \Delta_{i_k},$$

où  $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{Z}^n$  plutôt que dans  $\mathbb{R}^n$  et  $\Delta_i = \Delta_{x_i}$  pour  $i = 1, \dots, n$ , désigne l'opérateur de différence partielle finie par rapport à la  $i^e$  composante, c'est-à-dire,  $\Delta_i u(x_1, \dots, x_n) = u(x_1, \dots, x_i + 1, \dots, x_n) - u(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)$  pour toute fonction  $u = u(x_1, \dots, x_n)$ .

Nous proposons ici une variante de cette approche dans laquelle les formes de différences sont systématiquement remplacées par des *familles de poids* définies sur des hypercubes. Pour ce faire, nous posons  $\mathcal{H}_{k,n}$  comme l'ensemble

$$\mathcal{H}_{k,n} = \{H \mid H \text{ est un hypercube unitaire } \subseteq \mathbb{R}^n \text{ de dimension } k \text{ à sommets dans } \mathbb{Z}^n\}.$$

Un *hypercube*  $H \in \mathcal{H}_{k,n}$  peut être vu comme un *pixel généralisé* et est dénoté par

$$H = \text{Pix}_{i_1, \dots, i_k}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \\ = \left\{ (x_1, \dots, x_n) \left| \begin{array}{ll} x_j = \alpha_j & \text{si } j \notin \{i_1, \dots, i_k\} \\ \alpha_j \leq x_j \leq \alpha_j + 1 & \text{si } j \in \{i_1, \dots, i_k\} \end{array} \right. \right\}$$

où  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}^n$  et  $\{i_1 < \dots < i_k\} \subseteq \{1, \dots, n\}$  désigne l'ensemble des indices de coordonnées qui varient dans l'hypercube. On dit que l'hypercube  $H$  est issu du point  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  selon les directions  $i_1, \dots, i_k$ . Le point  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  est aussi appelé *coin principal* de l'hypercube et les deux orientations de  $H$  sont notées  $H$  et  $\epsilon H$  où  $\epsilon = -1$ .

Dans le même esprit, un *complexe hypercubique* dénoté  $\mathbf{P}$ , de dimension  $k$  dans  $\mathbb{R}^n$ , à sommets dans  $\mathbb{Z}^n$ , est une  $\mathbb{Z}$ -combinaison linéaire finie d'hypercubes  $\in \mathcal{H}_{k,n}$  et  $\mathbb{Z}\mathcal{H}_{k,n}$  désigne l'ensemble des complexes hypercubiques de dimension  $k$  dans  $\mathbb{R}^n$ . Signalons qu'un changement de signe correspond à un changement d'orientation. Bien évidemment, si tous les coefficients sont égaux à 1, le complexe hypercubique se ramène à une réunion d'hypercubes. Un complexe hypercubique peut donc être interprété comme une réunion d'hypercubes avec multiplicités et orientations diverses. La frontière délimitant une région est un concept primordial en géométrie discrète et est essentiel à la description d'un objet. À cet effet, la définition suivante décrit l'opérateur  $\partial$ , communément appelé opérateur de *frontière* (ou de *bord*), pour un hypercube et un complexe hypercubique.

**Définition 22** La frontière  $\partial H$  d'un hypercube  $H = \text{Pix}_{i_1, \dots, i_k}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  est le complexe

$$\partial H = \partial \text{Pix}_{i_1, \dots, i_k}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \sum_{\nu=1}^k (-1)^{\nu-1} (\text{Pix}_{i_1, \dots, \widehat{i_\nu}, \dots, i_k}(\alpha_1, \dots, \alpha_{i_\nu} + 1, \dots, \alpha_n) \\ - \text{Pix}_{i_1, \dots, \widehat{i_\nu}, \dots, i_k}(\alpha_1, \dots, \alpha_{i_\nu}, \dots, \alpha_n)),$$

où la notation  $\widehat{i_\nu}$  signifie que l'indice  $i_\nu$  est omis. Plus généralement, par linéarité, la frontière d'un complexe hypercubique  $\mathbf{P} = \sum_j n_j H_j$ ,  $n_j \in \mathbb{Z}$  est définie par

$$\partial \mathbf{P} = \sum_j n_j \partial H_j.$$

De façon plus détaillée, la frontière de  $\mathbf{P} = \sum_j n_j H_j = \sum_j n_j \text{Pix}_{i_1^{(j)}, \dots, i_k^{(j)}}(\alpha_1^{(j)}, \dots, \alpha_n^{(j)})$  est donnée par

$$\begin{aligned} \partial \mathbf{P} &= \sum_j n_j \partial \text{Pix}_{i_1^{(j)}, \dots, i_k^{(j)}}(\alpha_1^{(j)}, \dots, \alpha_n^{(j)}) \\ &= \sum_j n_j \sum_{\nu=1}^k (-1)^{\nu-1} (\text{Pix}_{i_1^{(j)}, \dots, \widehat{i_\nu^{(j)}}, \dots, i_k^{(j)}}(\alpha_1^{(j)}, \dots, \alpha_{i_\nu}^{(j)} + 1, \dots, \alpha_n^{(j)}) \\ &\quad - \text{Pix}_{i_1^{(j)}, \dots, i_\nu^{(j)}, \dots, \widehat{i_k^{(j)}}}(\alpha_1^{(j)}, \dots, \alpha_{i_\nu}^{(j)}, \dots, \alpha_n^{(j)})). \end{aligned}$$

En regroupant les termes semblables, on observe que l'expression obtenue est généralement plus simple.

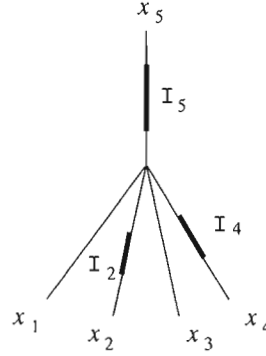
Voici un exemple où la frontière d'un hypercube est décrite selon la définition ci-haut. Soit  $n = 5$  et  $k = 3$ . Alors, pour  $1 \leq i_1 < i_2 < i_3 \leq 5$ , on a

$$H = \text{Pix}_{i_1, i_2, i_3}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5) \simeq I_{i_1} \times I_{i_2} \times I_{i_3} \subseteq \mathbb{R}^5,$$

où  $I_{i_\nu} = \{x_{i_\nu} | \alpha_{i_\nu} \leq x_{i_\nu} \leq \alpha_{i_\nu} + 1\} = [\alpha_{i_\nu}, \alpha_{i_\nu} + 1] \subseteq \mathbb{R}$ . La Figure 6.1 décrit ces intervalles pour  $i_1 = 2$ ,  $i_2 = 4$ ,  $i_3 = 5$ . Dans ce cas,

$$\begin{aligned} \partial H &= \sum_{\nu=1}^3 (-1)^{\nu-1} (\text{Pix}_{i_1, \dots, \widehat{i_\nu}, \dots, i_3}(\alpha_1, \dots, \alpha_{i_\nu} + 1, \dots, \alpha_5) \\ &\quad - \text{Pix}_{i_1, \dots, i_\nu, \dots, \widehat{i_3}}(\alpha_1, \dots, \alpha_{i_\nu}, \dots, \alpha_5)) \\ &= \text{Pix}_{i_2, i_3}(\alpha_1, \alpha_2 + 1, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5) - \text{Pix}_{i_2, i_3}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5) \\ &\quad - \text{Pix}_{i_1, i_3}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 + 1, \alpha_5) + \text{Pix}_{i_1, i_3}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5) \\ &\quad + \text{Pix}_{i_1, i_2}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5 + 1) - \text{Pix}_{i_1, i_2}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5). \end{aligned}$$

Voyons un autre exemple décrivant cette fois-ci la frontière d'un complexe hypercubique, dans lequel il y a des simplifications. Soit  $n = 2$ ,  $k = 2$  et  $\mathbf{P} = \text{Pix}_{1,2}(2, 1) + \text{Pix}_{1,2}(3, 1)$ . On



**Figure 6.1**  $I_{i_1} \times I_{i_2} \times I_{i_3} \subseteq \mathbb{R}^5$  où  $i_1 = 2, i_2 = 4, i_3 = 5$ .

vérifie aisément que

$$\begin{aligned} \partial \mathbf{P} &= (\text{Pix}_2(2+1, 1) - \text{Pix}_2(2, 1)) - (\text{Pix}_1(2, 1+1) - \text{Pix}_1(2, 1)) \\ &\quad + (\text{Pix}_2(3+1, 1) - \text{Pix}_2(3, 1)) - (\text{Pix}_1(3, 1+1) - \text{Pix}_1(3, 1)) \\ &= \text{Pix}_1(2, 1) + \text{Pix}_1(3, 1) + \text{Pix}_2(4, 1) - \text{Pix}_1(3, 2) - \text{Pix}_1(2, 2) - \text{Pix}_2(2, 1). \end{aligned}$$

Ce qui nous intéresse maintenant est de montrer que pour une forme différentielle quelconque, notre définition de  $\mathbf{P}$  et  $\partial \mathbf{P}$  entraîne que

$$\int_{\mathbf{P}} d\omega = \int_{\partial \mathbf{P}} \omega. \quad (6.1)$$

Par linéarité, il suffit de vérifier la formule pour un seul hypercube  $H$ . En effet, si (6.1) est vraie pour tout  $H$ , alors dans le cas où  $\mathbf{P} = \sum_j n_j H_j$ , on a

$$\int_{\mathbf{P}} d\omega = \int_{\sum_j n_j H_j} d\omega = \sum_j n_j \int_{H_j} d\omega \quad \text{et} \quad \int_{\partial \mathbf{P}} \omega = \int_{\sum_j n_j \partial H_j} \omega = \sum_j n_j \int_{\partial H_j} \omega.$$

Ceci nous permet de déduire que

$$\int_{H_j} d\omega = \int_{\partial H_j} \omega \quad \text{entraîne} \quad \int_{\mathbf{P}} d\omega = \int_{\partial \mathbf{P}} \omega.$$

Selon ces dernières observations, notre analyse peut se restreindre au cas d'un seul hypercube  $H$  orienté positivement et il ne reste plus qu'à vérifier que

$$\int_H d\omega = \int_{\partial H} \omega.$$

Pour ce faire, dans un premier temps, nous exprimons la relation dans un cadre plus général. Il convient d'abord d'évaluer l'intégrale  $\int_K \eta$ , pour un hypercube  $K$  de dimension  $r$  dans  $\mathbb{R}^n$  orienté positivement et une  $r$ -forme différentielle  $\eta$ . Plus précisément, posons

$$K = \text{Pix}_{p_1, \dots, p_r}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \text{ et } \eta = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n} \eta_{i_1, \dots, i_r}(x_1, \dots, x_n) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_r}.$$

On a donc,

$$\int_K \eta = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n} \int_K \eta_{i_1, \dots, i_r}(x_1, \dots, x_n) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_r}.$$

Remarquons d'abord que  $(x_1, \dots, x_n) \in K$  si et seulement si

$$x_q = \alpha_q \text{ si } q \notin \{p_1 < \dots < p_r\}, \quad \alpha_{p_\nu} \leq x_{p_\nu} \leq \alpha_{p_\nu} + 1 \text{ si } q = p_\nu.$$

Ces points peuvent être paramétrés comme suit :

$$x_q = x_q(t_{p_1}, \dots, t_{p_r}) = \begin{cases} \alpha_q & \text{si } q \notin \{p_1 < \dots < p_r\}, \\ \alpha_{p_\nu} + t_{p_\nu} & \text{si } q = p_\nu, \end{cases}$$

où  $0 \leq t_{p_\nu} \leq 1$ ,  $\nu = \{1, \dots, r\}$ .

Calculons ensuite  $dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_r}$  en fonction des paramètres  $t_{p_1}, t_{p_2}, \dots, t_{p_r}$ , qui donne l'expression

$$dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_r} = \begin{cases} 0 & \text{si } \{i_1 < \dots < i_r\} \neq \{p_1 < \dots < p_r\}, \\ dt_{p_1} \dots dt_{p_r} & \text{si } \{i_1 < \dots < i_r\} = \{p_1 < \dots < p_r\}, \end{cases}$$

et donc finalement

$$\begin{aligned} \int_K \eta &= 0 + \dots + 0 + \int_K \eta_{p_1, \dots, p_r}(x_1, \dots, x_n) dx_{p_1} \wedge \dots \wedge dx_{p_r} + 0 + \dots + 0 \\ &= \int_0^1 \int_0^1 \dots \int_0^1 \eta_{p_1, \dots, p_r}((x_q)_{q=1}^n) dt_{p_1} \dots dt_{p_r}, \end{aligned}$$

où

$$x_q = \begin{cases} \alpha_q & \text{si } q \notin \{p_1 < \dots < p_r\}, \\ \alpha_{p_\nu} + t_{p_\nu} & \text{si } q = p_\nu. \end{cases}$$

De façon équivalente, cette dernière égalité peut s'écrire plus simplement sous la forme condensée

$$x_q = \alpha_q + \chi(q \in \{p_1 < \dots < p_r\})t_q.$$

En résumé, l'intégrale de départ,  $\int_K \eta$  est donnée par l'expression

$$\int_K \eta = \int_0^1 \cdots \int_0^1 \eta_{p_1, \dots, p_r}((\alpha_q + \chi(q \in \{p_1 < \cdots < p_r\})t_q)_{q=1}^n) dt_{p_1} \cdots dt_{p_r},$$

où

$$K = \text{Pix}_{p_1, \dots, p_r}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \text{ et } \eta = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_r \leq n} \eta_{i_1, \dots, i_r}(x_1, \dots, x_n) dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_r}.$$

En conséquence, ces préliminaires vont nous permettre de vérifier facilement que la relation  $\int_H d\omega = \int_{\partial H} \omega$  est également satisfaite dans le cas d'un hypercube  $H$ . Analysons d'abord l'intégrale  $\int_{\partial H} \omega$ . Le domaine d'intégration  $K$  est alors remplacé par  $\partial H$  où  $H$  est un hypercube de dimension  $k$  et  $\eta$  est substituée par la forme différentielle  $\omega$  de degré  $k-1$ . Plus précisément, prenons

$$\omega = \sum_{1 \leq j_1 < \cdots < j_{k-1} \leq n} \omega_{j_1, \dots, j_{k-1}}(x_1, \dots, x_n) dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_{k-1}},$$

et supposons que  $H = \text{Pix}_{i_1, \dots, i_k}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ . La frontière associée est donnée par

$$\begin{aligned} \partial H = \partial \text{Pix}_{i_1, \dots, i_k}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) &= \sum_{\nu=1}^k (-1)^{\nu-1} (\text{Pix}_{i_1, \dots, \widehat{i_\nu}, \dots, i_k}(\alpha_1, \dots, \alpha_{i_\nu} + 1, \dots, \alpha_n) \\ &\quad - \text{Pix}_{i_1, \dots, \widehat{i_\nu}, \dots, i_k}(\alpha_1, \dots, \alpha_{i_\nu}, \dots, \alpha_n)) \end{aligned}$$

et donc,

$$\begin{aligned} &\int_{\partial H} \omega \\ &= \sum_{\nu=1}^k (-1)^{\nu-1} \left( \int_{\text{Pix}_{i_1, \dots, \widehat{i_\nu}, \dots, i_k}(\alpha_1, \dots, \alpha_{i_\nu} + 1, \dots, \alpha_n)} \omega - \int_{\text{Pix}_{i_1, \dots, \widehat{i_\nu}, \dots, i_k}(\alpha_1, \dots, \alpha_{i_\nu}, \dots, \alpha_n)} \omega \right) \\ &= \sum_{\nu=1}^k (-1)^{\nu-1} \int_0^1 \cdots \int_0^1 (\omega_{i_1, \dots, \widehat{i_\nu}, \dots, i_k}(\cdots, \alpha_{i_1} + t_{i_1}, \cdots, \alpha_{i_\nu} + 1, \cdots, \alpha_{i_k} + t_{i_k}, \cdots) \\ &\quad - \omega_{i_1, \dots, \widehat{i_\nu}, \dots, i_k}(\cdots, \alpha_{i_1} + t_{i_1}, \cdots, \alpha_{i_\nu}, \cdots, \alpha_{i_k} + t_{i_k}, \cdots)) dt_{i_1} \cdots \widehat{dt_{i_\nu}} \cdots dt_{i_k}. \end{aligned}$$

Notons que,  $F(\alpha_{i_\nu} + 1) - F(\alpha_{i_\nu}) = \int_0^1 F'(\alpha_{i_\nu} + t_{i_\nu}) dt_{i_\nu}$ .

Ainsi,

$$\begin{aligned} \int_{\partial H} \omega &= \sum_{\nu=1}^k (-1)^{\nu-1} \left( \int_0^1 \cdots \int_0^1 \left[ \int_0^1 \frac{\partial \omega_{i_1, \dots, \widehat{i}_\nu, \dots, i_k}}{\partial t_{i_\nu}} (\dots, \alpha_{i_\nu} + t_{i_\nu}, \dots) dt_{i_\nu} \right] dt_{i_1} \cdots dt_{i_k} \right) \\ &= \sum_{\nu=1}^k \left( \int_0^1 \cdots \int_0^1 (-1)^{\nu-1} \frac{\partial \omega_{i_1, \dots, \widehat{i}_\nu, \dots, i_k}}{\partial t_{i_\nu}} (\dots, \alpha_{i_\nu} + t_{i_\nu}, \dots) dt_{i_1} \cdots dt_{i_\nu} \cdots dt_{i_k} \right). \end{aligned}$$

Analysons maintenant l'intégrale  $\int_H d\omega$ . Dans ce cas, le domaine d'intégration  $K$  est remplacé par  $H$  et  $\eta$  devient  $d\omega$ . Puisque

$$\omega = \sum_{1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_{k-1} \leq n} \omega_{j_1, \dots, j_{k-1}}(x_1, \dots, x_n) dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_{k-1}},$$

on a

$$d\omega = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} \left( \sum_{\nu=1}^k (-1)^{\nu-1} \frac{\partial \omega_{i_1, \dots, \widehat{i}_\nu, \dots, i_k}}{\partial x_{i_\nu}}(x_1, \dots, x_n) \right) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}.$$

Donc pour  $H = \text{Pix}_{i_1, \dots, i_k}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ , on trouve

$$\begin{aligned} \int_H d\omega &= \int_H (d\omega)_{i_1, \dots, i_k}(x_1, \dots, x_n) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \\ &= \int_H \left( \sum_{\nu=1}^k (-1)^{\nu-1} \frac{\partial \omega_{i_1, \dots, \widehat{i}_\nu, \dots, i_k}}{\partial x_{i_\nu}}(x_1, \dots, x_n) \right) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}. \end{aligned}$$

En paramétrisant ensuite avec,

$$x_q = x_q(t_{i_1}, \dots, t_{i_k}) = \begin{cases} \alpha_q & \text{si } q \notin \{i_1 < \dots < i_k\}, \\ \alpha_{i_\nu} + t_{i_\nu} & \text{si } q = i_\nu, \end{cases}$$

on obtient,

$$\int_H d\omega = \int_0^1 \cdots \int_0^1 \sum_{\nu=1}^k (-1)^{\nu-1} \frac{\partial \omega_{i_1, \dots, \widehat{i}_\nu, \dots, i_k}}{\partial t_{i_\nu}} (\dots, \alpha_{i_\nu} + t_{i_\nu}, \dots) dt_{i_1} \cdots dt_{i_\nu} \cdots dt_{i_k},$$

ce qui correspond bien à l'expression de l'intégrale  $\int_{\partial H} \omega$  évaluée plus haut.

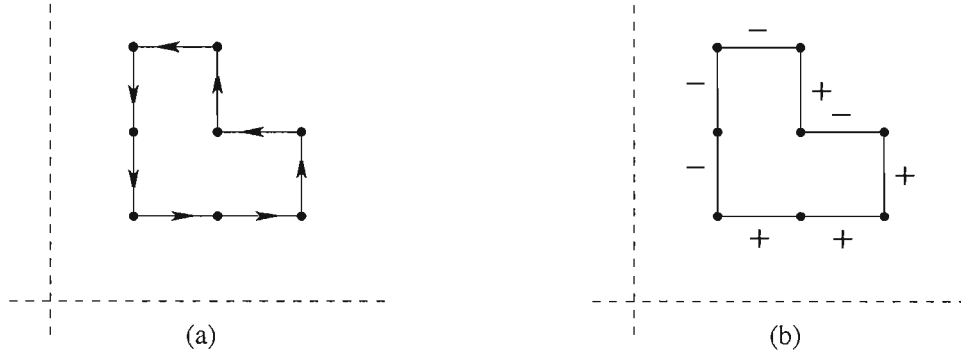
Notre étude au Chapitre 2, basée sur une version discrète du théorème de Green, se ramène précisément au cas  $n = 2, k = 2$  avec  $\omega = P(x, y)dx + Q(x, y)dy$  et

$$d\omega = \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = f(x, y) dx dy.$$

Les  $H$ ,  $V$  et  $VH$  algorithmes développés au Chapitre 2 permettent en l'occurrence d'évaluer le membre de gauche de la relation

$$\int_{\mathbf{P}} d\omega = \int_{\partial\mathbf{P}} \omega,$$

en exprimant  $\omega$ , c'est-à-dire,  $P$  et  $Q$  en fonction de  $f$ . Cependant, dans ces trois algorithmes vus précédemment, la frontière des polyominos était encodée par des chemins orientés plutôt que par des combinaisons linéaires de segments (voir Figure 6.2 (a), (b)). Afin d'exploiter ces idées, nous adaptons cette étude dans le cadre actuel.



**Figure 6.2** Frontière : (a) chemin orienté (b) combinaison linéaire de segments.

Étant donnée  $f$  une  $k$ -forme différentielle exacte à  $n$  variables,

$$f = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} f_{i_1, \dots, i_k}(x_1, \dots, x_n) dx_{i_1} \cdots dx_{i_k} = d\omega,$$

on cherche à développer de nouveaux algorithmes qui correspondent à trouver des expressions convenables pour de telles formes  $\omega$ . On aura alors,

$$\int_{\mathbf{P}} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} f_{i_1, \dots, i_k}(x_1, \dots, x_n) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} = \int_{\mathbf{P}} f = \int_{\partial\mathbf{P}} \omega,$$

ce qui fournit des méthodes de calcul du membre de gauche en évaluant le membre de droite.

Par exemple, soit  $n = 3$  et  $k = 2$ . On considère ensuite une 2-forme fermée, c'est-à-dire qui satisfait  $df = 0$ , à trois variables définie partout dans  $\mathbb{R}^3$  :

$$f = f_{1,2}(x_1, x_2, x_3) dx_1 \wedge dx_2 + f_{1,3}(x_1, x_2, x_3) dx_1 \wedge dx_3 + f_{2,3}(x_1, x_2, x_3) dx_2 \wedge dx_3.$$



Autrement dit,

$$\frac{\partial f_{2,3}}{\partial x_1} - \frac{\partial f_{1,3}}{\partial x_2} + \frac{\partial f_{1,2}}{\partial x_3} = 0.$$

Comme  $\mathbb{R}^3$  est étoilé, par le lemme de Poincaré on sait qu'il existe  $\omega$  telle que  $f = d\omega$ . Cherchons une telle 1-forme à trois variables,

$$\omega = \omega_1(x_1, x_2, x_3)dx_1 + \omega_2(x_1, x_2, x_3)dx_2 + \omega_3(x_1, x_2, x_3)dx_3,$$

satisfaisant  $d\omega = f$ . C'est-à-dire,

$$\left(\frac{\partial \omega_2}{\partial x_1} - \frac{\partial \omega_1}{\partial x_2}\right) = f_{1,2}, \quad \left(\frac{\partial \omega_3}{\partial x_1} - \frac{\partial \omega_1}{\partial x_3}\right) = f_{1,3}, \quad \left(\frac{\partial \omega_3}{\partial x_2} - \frac{\partial \omega_2}{\partial x_3}\right) = f_{2,3}.$$

Dans ce cas, en ramenant le membre de gauche à un hypercube  $H = \text{Pix}_{i_1, i_2}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ , on peut définir une famille de *poids*,  $w_{1,2}, w_{1,3}, w_{2,3} : \mathbb{Z}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ , par

$$\begin{aligned} & \int_H f_{1,2}(x_1, x_2, x_3)dx_1 \wedge dx_2 + f_{1,3}(x_1, x_2, x_3)dx_1 \wedge dx_3 + f_{2,3}(x_1, x_2, x_3)dx_2 \wedge dx_3 \\ &= \begin{cases} \int_H f_{1,2}dx_1 \wedge dx_2 = w_{1,2}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) & \text{si } H = \text{Pix}_{1,2}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), \\ \int_H f_{1,3}dx_1 \wedge dx_3 = w_{1,3}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) & \text{si } H = \text{Pix}_{1,3}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), \\ \int_H f_{2,3}dx_2 \wedge dx_3 = w_{2,3}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) & \text{si } H = \text{Pix}_{2,3}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3). \end{cases} \end{aligned}$$

En résumé, la famille  $w = (w_{1,2}, w_{1,3}, w_{2,3})$  définit le poids des 2-pixels  $H$  dans  $\mathbb{R}^3$  par

$$w(H) = \int_H f = w_{i,j}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \quad \text{si } H = \text{Pix}_{i,j}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), \quad (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{Z}^3.$$

On a alors,

$$w(H) = \int_H f = \int_{\partial H} \omega.$$

Puisque toute  $k$ -forme différentielle  $f$  donne lieu à une fonction de poids  $w$  sur les hypercubes de dimension  $k$  définie par  $w(H) = \int_H f$ , ceci nous amène à discrétiser le contexte de la façon suivante.

Rappelons d'abord que  $\mathcal{H}_{r,n} = \{H \mid H \subseteq \mathbb{R}^n, H \text{ est un hypercube unitaire de dimension } r\}$  et  $\mathbb{Z}\mathcal{H}_{r,n}$  est l'ensemble des complexes hypercubiques de dimension  $r$  dans  $\mathbb{R}^n$ .

**Définition 23** Une fonction quelconque  $w : \mathcal{H}_{r,n} \longrightarrow \mathbb{R}$  est appelée fonction de poids sur les hypercubes de dimension  $r$  dans  $\mathbb{R}^n$ .

Notons que la donnée d'une telle fonction de poids  $w$  équivaut à la donnée d'une famille  $w = (w_{j_1, \dots, j_r})_{1 \leq j_1 < \dots < j_r \leq n}$  constituée de  $\binom{n}{r}$  fonctions de poids  $w_{j_1, \dots, j_r} : \mathbb{Z}^n \longrightarrow \mathbb{R}$  définies par

$$(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \mapsto w_{j_1, \dots, j_r}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = w(\text{Pix}_{j_1, \dots, j_r}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)).$$

Plus généralement, on peut prendre des fonctions  $w_{j_1, \dots, j_r} : \mathbb{Z}^n \longrightarrow \mathbb{A}$ , où  $\mathbb{A}$  est un anneau commutatif quelconque.

**Définition 24** Soit  $w = (w_{j_1, \dots, j_r})_{1 \leq j_1 < \dots < j_r \leq n}$  une fonction de poids sur les  $r$ -hypercubes dans  $\mathcal{H}_{r,n}$ . L'opérateur de différence finie extérieure, dénotée  $\Delta$ , agit sur  $w$  en produisant une nouvelle fonction de poids, notée  $\Delta w$ , définie sur les  $(r+1)$ -hypercubes dans  $\mathcal{H}_{r+1,n}$  par la formule

$$\Delta w = ((\Delta w)_{i_1, \dots, i_{r+1}})_{1 \leq i_1 < \dots < i_{r+1} \leq n},$$

$$\text{où } (\Delta w)_{i_1, \dots, i_{r+1}}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \sum_{\nu=1}^{r+1} (-1)^{\nu-1} \Delta_{i_\nu} w_{i_1, \dots, \hat{i}_\nu, \dots, i_{r+1}}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$$

$$\text{et } \Delta_{i_\nu} h(\alpha_1, \dots, \alpha_{i_\nu}, \dots, \alpha_n) = h(\alpha_1, \dots, \alpha_{i_\nu} + 1, \dots, \alpha_n) - h(\alpha_1, \dots, \alpha_{i_\nu}, \dots, \alpha_n).$$

Remarquons que si  $r = 0$ , alors la donnée d'une fonction de poids  $w : \mathcal{H}_{0,n} \longrightarrow \mathbb{R}$  se ramène à une fonction ordinaire  $w : \mathbb{Z}^n \longrightarrow \mathbb{R}$  car,

$$\mathcal{H}_{0,n} = \{H \mid H = \text{Pix}_\emptyset(\alpha_1, \dots, \alpha_n)\} = \{H \mid H = \{(\alpha_1, \dots, \alpha_n)\}\} = \mathbb{Z}^n.$$

Dans ce cas,  $\Delta w : \mathcal{H}_{1,n} \longrightarrow \mathbb{R}$  est donnée par

$$\begin{aligned} (\Delta w)_i(\alpha_1, \dots, \alpha_n) &= \Delta_i w(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \\ &= w(\alpha_1, \dots, \alpha_i + 1, \dots, \alpha_n) - w(\alpha_1, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_n), \end{aligned}$$

ce qui correspond au calcul classique des différences finies de fonctions à plusieurs variables.

Voyons maintenant que l'opérateur de différence finie extérieure possède la propriété notable

$$\Delta^2 = 0,$$

équivalente à  $d^2 = 0$  dans le cas de la différentiation extérieure.

**Proposition 8** Si  $W : \mathcal{H}_{k,n} \longrightarrow \mathbb{R}$  alors  $\Delta^2 W = 0$ .

**Preuve.** Évaluons

$$\begin{aligned}
 & (\Delta^2 W)_{i_1, \dots, i_{k+2}}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \\
 &= \sum_{\nu=1}^{k+2} (-1)^{\nu-1} \Delta_{i_\nu} (\Delta W)_{i_1, \dots, \widehat{i}_\nu, \dots, i_{k+2}}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \\
 &= \sum_{1 \leq \nu \leq k+2} (-1)^{\nu-1} \Delta_{i_\nu} \left( \sum_{1 \leq \mu \leq k+2, \mu < \nu} (-1)^{\mu-1} \Delta_{i_\mu} W_{i_1, \dots, \widehat{i}_\mu, \dots, \widehat{i}_\nu, \dots, i_n}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{1 \leq \mu \leq k+2, \nu < \mu} (-1)^{\mu-2} \Delta_{i_\mu} W_{i_1, \dots, \widehat{i}_\nu, \dots, \widehat{i}_\mu, \dots, i_n}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \right) \\
 &= \sum_{1 \leq \nu \leq k+2, 1 \leq \mu \leq k+2, \mu < \nu} (-1)^{\nu-1+\mu-1} \Delta_{i_\nu} \Delta_{i_\mu} W_{i_1, \dots, \widehat{i}_\mu, \dots, \widehat{i}_\nu, \dots, i_n}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \\
 &\quad + \sum_{1 \leq \nu \leq k+2, 1 \leq \mu \leq k+2, \nu < \mu} (-1)^{\nu-1+\mu-2} \Delta_{i_\nu} \Delta_{i_\mu} W_{i_1, \dots, \widehat{i}_\nu, \dots, \widehat{i}_\mu, \dots, i_n}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \\
 &= \sum_{1 \leq \nu \leq k+2, 1 \leq \mu \leq k+2, \mu < \nu} (-1)^{\nu-1+\mu-1} \Delta_{i_\nu} \Delta_{i_\mu} W_{i_1, \dots, \widehat{i}_\mu, \dots, \widehat{i}_\nu, \dots, i_n}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \\
 &\quad + \sum_{1 \leq \mu \leq k+2, 1 \leq \nu \leq k+2, \mu < \nu} (-1)^{\mu-1+\nu-2} \Delta_{i_\mu} \Delta_{i_\nu} W_{i_1, \dots, \widehat{i}_\mu, \dots, \widehat{i}_\nu, \dots, i_n}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \\
 &= \sum_{1 \leq \nu \leq k+2, 1 \leq \mu \leq k+2, \mu < \nu} (-1)^{\nu+\mu} \Delta_{i_\nu} \Delta_{i_\mu} W_{i_1, \dots, \widehat{i}_\mu, \dots, \widehat{i}_\nu, \dots, i_n}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \\
 &\quad - \sum_{1 \leq \nu \leq k+2, 1 \leq \mu \leq k+2, \mu < \nu} (-1)^{\mu+\nu} \Delta_{i_\nu} \Delta_{i_\mu} W_{i_1, \dots, \widehat{i}_\mu, \dots, \widehat{i}_\nu, \dots, i_n}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

■

Par analogie au cas des formes différentielles, une famille de poids  $w$  peut être fermée ou exacte.

**Définition 25** Soit  $w$  une famille de poids. On dit que  $w$  est fermée si  $\Delta w = 0$  et qu'elle est exacte si  $\exists \rho$  telle que  $w = \Delta \rho$ .

Par linéarité, on peut étendre  $w$  et  $\Delta w$  à tous les complexes hypercubiques

$$w : \mathcal{ZH}_{r,n} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \Delta w : \mathcal{ZH}_{r+1,n} \longrightarrow \mathbb{R}.$$

en posant

$$w(\mathbf{P}) = \sum_i n_i w(K_i), \quad \text{et} \quad (\Delta w)(\mathbf{Q}) = \sum_j m_j \Delta w(L_j),$$

où  $\mathbf{P} = \sum_i n_i K_i$  et  $\mathbf{Q} = \sum_j m_j L_j$ ,  $K_i \in \mathcal{H}_{r,n}$ ,  $L_j \in \mathcal{H}_{r+1,n}$ .

L'un des attraits des opérateurs de différences finies classiques  $\Delta_{i_\nu}$ , est qu'ils permettent aussi d'exprimer élégamment l'opérateur de bord  $\partial$ , défini sur les hypercubes. En effet, soit  $H = \text{Pix}_{i_1, \dots, i_r}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathcal{H}_{r,n}$ . Puisque

$$\begin{aligned} \Delta_{i_\nu} \text{Pix}_{i_1, \dots, \widehat{i_\nu}, \dots, i_r}(\alpha_1, \dots, \alpha_{i_\nu}, \dots, \alpha_n) \\ = \text{Pix}_{i_1, \dots, \widehat{i_\nu}, \dots, i_r}(\alpha_1, \dots, \alpha_{i_\nu} + 1, \dots, \alpha_n) - \text{Pix}_{i_1, \dots, \widehat{i_\nu}, \dots, i_r}(\alpha_1, \dots, \alpha_{i_\nu}, \dots, \alpha_n). \end{aligned}$$

on a immédiatement

$$\partial H = \partial \text{Pix}_{i_1, \dots, i_r}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \sum_{\nu=1}^r (-1)^{\nu-1} \Delta_{i_\nu} \text{Pix}_{i_1, \dots, \widehat{i_\nu}, \dots, i_r}(\alpha_1, \dots, \alpha_n).$$

Par linéarité, on étend  $\partial$  comme plus haut, c'est-à-dire, si  $\mathbf{P} = \sum_i n_i H_i$ , alors  $\partial \mathbf{P} = \sum_i n_i \partial H_i$ .

L'intérêt dans la version discrète du théorème de Stokes que nous allons présenter, réside dans le fait qu'elle élimine toutes les intégrales ainsi que toutes les formes différentielles, en ne considérant que les fonctions de poids sur des complexes hypercubiques.

**Théorème 10** (Version discrète du théorème de Stokes) *Pour tout complexe hypercubique  $\mathbf{P}$  de dimension  $k$  dans  $\mathbb{R}^n$  et toute fonction de poids  $w$  définie sur les complexes hypercubiques de dimension  $k-1$  dans  $\mathbb{R}^n$ , on a*

$$(\Delta w)(\mathbf{P}) = w(\partial \mathbf{P}). \quad (6.2)$$

**Preuve.** Par linéarité, il suffit de considérer le cas où  $\mathbf{P}$  est constitué d'un seul hypercube  $H = \text{Pix}_{i_1, \dots, i_k}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ . On a successivement,

$$\begin{aligned}
 (\Delta w)(H) &= (\Delta w)(\text{Pix}_{i_1, \dots, i_k}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)) \\
 &= (\Delta w)_{i_1, \dots, i_k}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \\
 &= \sum_{\nu=1}^k (-1)^{\nu-1} \Delta_{i_\nu} w_{i_1, \dots, \widehat{i_\nu}, \dots, i_k}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \\
 &= \sum_{\nu=1}^k (-1)^{\nu-1} \Delta_{i_\nu} w(\text{Pix}_{i_1, \dots, \widehat{i_\nu}, \dots, i_k}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)) \\
 &= w\left(\sum_{\nu=1}^k (-1)^{\nu-1} \Delta_{i_\nu} \text{Pix}_{i_1, \dots, \widehat{i_\nu}, \dots, i_k}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)\right) \\
 &= w(\partial \text{Pix}_{i_1, \dots, i_k}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)) = w(\partial H).
 \end{aligned}$$

■

Tout comme au Chapitre 2, au lieu de considérer l'équation (6.2), il est plus intéressant d'écrire le membre de gauche sous la forme  $W(\mathbf{P})$ , où  $W$  est une fonction de poids donnée et  $\mathbf{P}$  est un complexe hypercubique quelconque. Le membre de droite peut alors être décrit comme un algorithme pour calculer  $W(\mathbf{P})$  à l'aide d'une autre fonction de poids  $\Phi$ , appliquée à la frontière  $\partial \mathbf{P}$ .

Commençons d'abord par le cas où  $\mathbf{P}$  se réduit à un hypercube  $H$  quelconque. Étant donnée une fonction de poids  $W : \mathcal{H}_{k,n} \longrightarrow \mathbb{R}$  qui est fermée, c'est-à-dire que  $\Delta W = 0$ , on cherche une fonction de poids  $\Phi : \mathcal{H}_{k-1,n} \longrightarrow \mathbb{R}$ , telle que  $W = \Delta \Phi$ . On aura alors,

$$W(H) = \Phi(\partial H),$$

ce qui correspond à la version discrète du théorème de Stokes :

$$(\Delta \Phi)(H) = \Phi(\partial H).$$

Par analogie au calcul des différences finies, on peut utiliser la notation  $\Phi = \Sigma W$ , d'où l'écriture,

$$W(H) = (\Sigma W)(\partial H).$$

Une façon à la fois générale et rigoureuse de définir  $\Sigma$  sera donnée un peu plus loin. Pour l'instant, voyons ce qu'il advient lorsqu'on attribue la fonction de poids  $W(H) = 1$  à chacun des hypercubes  $H \in \mathcal{H}_{k,n}$ . Cette fonction de poids est évidemment fermée car

$$\begin{aligned} (\Delta W)_{j_1, \dots, j_{k+1}}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) &= \sum_{\nu=1}^{k+1} (-1)^{\nu-1} \Delta_{j_\nu} (W'_{j_1, \dots, \widehat{j_\nu}, \dots, j_{k+1}}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)) \\ &= \sum_{\nu=1}^{k+1} (-1)^{\nu-1} \Delta_{j_\nu} \cdot 1 = 0. \end{aligned}$$

Dans le cas d'un complexe hypercubique  $\mathbf{P} = \sum n_i H_i$ , on obtient

$$W(\mathbf{P}) = \sum n_i W(H_i) = \sum n_i = \text{Vol}(\mathbf{P}),$$

où  $\text{Vol}(\mathbf{P})$  correspond au volume orienté (avec multiplicités) de  $\mathbf{P}$ . On doit donc chercher une famille  $\Phi$  telle que  $W = \Delta \Phi$ .

Par exemple, soit  $n = 3$  et  $k = 2$  avec  $W(H) = 1$  pour tout pixel  $H \in \mathcal{H}_{2,3}$ . Afin de trouver une solution, cherchons un  $\Phi$  défini sur les  $K \in \mathcal{H}_{1,3}$  de la forme

$$\Phi(K) = \begin{cases} c_{11}\alpha_1 + c_{12}\alpha_2 + c_{13}\alpha_3 & \text{si } K = \text{Pix}_1(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), \\ c_{21}\alpha_1 + c_{22}\alpha_2 + c_{23}\alpha_3 & \text{si } K = \text{Pix}_2(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), \\ c_{31}\alpha_1 + c_{32}\alpha_2 + c_{33}\alpha_3 & \text{si } K = \text{Pix}_3(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), \end{cases}$$

pour certaines constantes  $c_{ij}$ . On a respectivement,

$$\begin{aligned} (\Delta \Phi)_{12}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) &= \Delta_1 \Phi_2(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) - \Delta_2 \Phi_1(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \\ &= [c_{21}(\alpha_1 + 1) + c_{22}\alpha_2 + c_{23}\alpha_3 - c_{21}\alpha_1 - c_{22}\alpha_2 - c_{23}\alpha_3] \\ &\quad - [c_{11}\alpha_1 + c_{12}(\alpha_2 + 1) + c_{13}\alpha_3 - c_{11}\alpha_1 - c_{12}\alpha_2 - c_{13}\alpha_3] \\ &= c_{21} - c_{12} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\Delta \Phi)_{13}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) &= \Delta_1 \Phi_3(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) - \Delta_3 \Phi_1(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \\ &= [c_{31}(\alpha_1 + 1) + c_{32}\alpha_2 + c_{33}\alpha_3 - c_{31}\alpha_1 - c_{32}\alpha_2 - c_{33}\alpha_3] \\ &\quad - [c_{11}\alpha_1 + c_{12}\alpha_2 + c_{13}(\alpha_3 + 1) - c_{11}\alpha_1 - c_{12}\alpha_2 - c_{13}\alpha_3] \\ &= c_{31} - c_{13} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\Delta\Phi)_{23}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) &= \Delta_2\Phi_3(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) - \Delta_3\Phi_2(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \\
&= [c_{31}\alpha_1 + c_{32}(\alpha_2 + 1) + c_{33}\alpha_3 - c_{31}\alpha_1 - c_{32}\alpha_2 - c_{33}\alpha_3] \\
&\quad - [c_{21}\alpha_1 + c_{22}\alpha_2 + c_{23}(\alpha_3 + 1) - c_{21}\alpha_1 - c_{22}\alpha_2 - c_{23}\alpha_3] \\
&= c_{32} - c_{23}.
\end{aligned}$$

Une solution élégante au problème consisterait à choisir les  $c_{i,j}$  tels que

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Effectivement, en posant

$$\Phi(K) = \begin{cases} (-\frac{1}{2}\alpha_2 - \frac{1}{2}\alpha_3) & \text{si } K = \text{Pix}_1(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), \\ (\frac{1}{2}\alpha_1 - \frac{1}{2}\alpha_3) & \text{si } K = \text{Pix}_2(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), \\ (\frac{1}{2}\alpha_1 + \frac{1}{2}\alpha_2) & \text{si } K = \text{Pix}_3(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), \end{cases}$$

on retrouve bien  $\text{Vol}(\mathbf{P}) = \Phi(\partial P)$ .

Plus généralement, si  $W : \mathcal{H}_{k,n} \rightarrow \mathbb{R}$  ne dépend que des directions  $i_1, \dots, i_k$  des hypercubes et non de leurs positions, alors  $\Delta W = 0$ .

En effet, si  $W_{i_1, \dots, i_k}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \theta_{i_1, \dots, i_k} \in \mathbb{R}$  alors,

$$\begin{aligned}
(\Delta W)_{j_1, \dots, j_{k+1}}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) &= \sum_{\nu=1}^{k+1} (-1)^{\nu-1} \Delta_{j_\nu} W_{j_1, \dots, \widehat{j_\nu}, \dots, j_{k+1}}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \\
&= \sum_{\nu=1}^{k+1} (-1)^{\nu-1} (W_{j_1, \dots, \widehat{j_\nu}, \dots, j_{k+1}}(\alpha_1, \dots, \alpha_{j_\nu} + 1, \dots, \alpha_n) \\
&\quad - W_{j_1, \dots, \widehat{j_\nu}, \dots, j_{k+1}}(\alpha_1, \dots, \alpha_{j_\nu}, \dots, \alpha_n)) \\
&= \sum_{\nu=1}^{k+1} (-1)^{\nu-1} (\theta_{j_1, \dots, \widehat{j_\nu}, \dots, j_{k+1}} - \theta_{j_1, \dots, \widehat{j_\nu}, \dots, j_{k+1}}) \\
&= \sum_{\nu=1}^{k+1} (-1)^{\nu-1} \cdot 0 = 0.
\end{aligned}$$

La recherche d'une famille de poids  $\Phi$ , telle que  $\Phi = \Delta W$ , pourrait être réalisée en adoptant une approche semblable à la précédente en faisant appel à des coefficients indéterminés. Ces exemples ne sont que des cas particuliers d'une situation beaucoup plus générale.

Nous allons plutôt développer une méthode de calcul basée sur une version discrète du lemme de Poincaré, valide dans le cas des familles de poids sur les hypercubes.

Introduisons d'abord un concept parent de la différence partielle finie  $\Delta_i$ , qui est la sommation partielle  $\Sigma_i$ . Soit  $f : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , et  $1 \leq i \leq n$ , alors

$$\Sigma_i f(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \begin{cases} \sum_{\nu_i=0}^{\alpha_i-1} f(\alpha_1, \dots, \nu_i, \dots, \alpha_n) & \text{si } \alpha_i > 0, \\ 0 & \text{si } \alpha_i = 0, \\ -\sum_{\nu_i=\alpha_i}^{-1} f(\alpha_1, \dots, \nu_i, \dots, \alpha_n) & \text{si } \alpha_i < 0. \end{cases}$$

**Lemme 21** *On a les identités*

$$\Delta_i \Sigma_i = \text{id} \quad \text{et} \quad \Sigma_i \Delta_i = \text{id} - \text{eval}_{i,0}$$

où  $\text{eval}_{i,0}$  est l'opérateur d'évaluation de la  $i^{\text{e}}$  composante à l'origine, défini par

$$\text{eval}_{i,0} f(\alpha_1, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_n) = f(\alpha_1, \dots, 0, \dots, \alpha_n).$$

De plus, si  $i \neq j$ , alors

$$\Delta_j \Sigma_i = \Sigma_i \Delta_j.$$

**Preuve.** Comme les cas  $\alpha_i = 0$  et  $\alpha_i < 0$  sont similaires, nous allons nous restreindre à l'analyse du cas  $\alpha_i > 0$ . D'une part, on a

$$\begin{aligned} (\Delta_i \Sigma_i f)(\alpha_1, \dots, \alpha_n) &= \Delta_i \left( \sum_{\nu_i=0}^{\alpha_i-1} f(\alpha_1, \dots, \nu_i, \dots, \alpha_n) \right) \\ &= \sum_{\nu_i=0}^{\alpha_i+1-1} f(\alpha_1, \dots, \nu_i, \dots, \alpha_n) - \sum_{\nu_i=0}^{\alpha_i-1} f(\alpha_1, \dots, \nu_i, \dots, \alpha_n) \\ &= f(\alpha_1, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_n). \end{aligned}$$



D'autre part,

$$\begin{aligned}
 \Sigma_i \Delta_i f(\alpha_1, \dots, \alpha_n) &= \sum_{\nu_i=0}^{\alpha_i-1} (f(\alpha_1, \dots, \nu_i + 1, \dots, \alpha_n) - f(\alpha_1, \dots, \nu_i, \dots, \alpha_n)) \\
 &= f(\alpha_1, \dots, 1, \dots, \alpha_n) - f(\alpha_1, \dots, 0, \dots, \alpha_n) \\
 &\quad + \dots + f(\alpha_1, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_n) - f(\alpha_1, \dots, \alpha_i - 1, \dots, \alpha_n) \\
 &= f(\alpha_1, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_n) - f(\alpha_1, \dots, 0, \dots, \alpha_n).
 \end{aligned}$$

Finalement, si  $i \neq j$ , on vérifie les deux possibilités suivantes.

Cas 1 : si  $i < j$ , alors

$$\begin{aligned}
 (\Delta_j \Sigma_i f)(\alpha_1, \dots, \alpha_n) &= \sum_{\nu_i=0}^{\alpha_i-1} f(\alpha_1, \dots, \nu_i, \dots, \alpha_j + 1, \dots, \alpha_n) - \sum_{\nu_i=0}^{\alpha_i-1} f(\alpha_1, \dots, \nu_i, \dots, \alpha_j, \dots, \alpha_n) \\
 &= \sum_{\nu_i=0}^{\alpha_i-1} (f(\alpha_1, \dots, \nu_i, \dots, \alpha_j + 1, \dots, \alpha_n) - f(\alpha_1, \dots, \nu_i, \dots, \alpha_j, \dots, \alpha_n)) \\
 &= (\Sigma_i \Delta_j f)(\alpha_1, \dots, \alpha_n).
 \end{aligned}$$

Cas 2 : si  $i > j$ , alors

$$\begin{aligned}
 (\Delta_j \Sigma_i f)(\alpha_1, \dots, \alpha_n) &= \sum_{\nu_i=0}^{\alpha_i-1} f(\alpha_1, \dots, \alpha_j + 1, \dots, \nu_i, \dots, \alpha_n) - \sum_{\nu_i=0}^{\alpha_i-1} f(\alpha_1, \dots, \alpha_j, \dots, \nu_i, \dots, \alpha_n) \\
 &= \sum_{\nu_i=0}^{\alpha_i-1} (f(\alpha_1, \dots, \alpha_j + 1, \dots, \nu_i, \dots, \alpha_n) - f(\alpha_1, \dots, \alpha_j, \dots, \nu_i, \dots, \alpha_n)) \\
 &= (\Sigma_i \Delta_j f)(\alpha_1, \dots, \alpha_n). \blacksquare
 \end{aligned}$$

L'espace des fonctions de poids sur les  $k$ -hypercubes dans l'espace à  $n$  dimensions est dénoté

$$\mathbb{W}_{k,n} = \{W \mid W : \mathcal{H}_{k,n} \longrightarrow \mathbb{R}\} = \{(W_{i_1, \dots, i_k})_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \mid W_{i_1, \dots, i_k} : \mathbb{Z}^n \longrightarrow \mathbb{R}\}.$$

Les fonctions de poids  $W = (W_{i_1, \dots, i_k})_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n}$  s'interprètent comme suit : le  $W$ -poids de tout hypercube  $H = \text{Pix}_{i_1, \dots, i_k}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathcal{H}_{k,n}$  est donné par

$$W(H) = W_{i_1, \dots, i_k}(\alpha_1, \dots, \alpha_n).$$

Rappelons que la preuve du lemme de Poincaré faisait appel à un opérateur d'homotopie  $h$ , une sorte d'opérateur d'intégration que l'on pourrait aussi dénoter  $\int$ , qui satisfaisait l'équation

$$dh + hd = \text{id}.$$

Par analogie, nous allons maintenant introduire un opérateur  $\Sigma$ , de sommation extérieure, défini sur les fonctions de poids sur les hypercubes, satisfaisant

$$\Delta\Sigma + \Sigma\Delta = \text{id}.$$

À cet effet, nous définissons d'abord des opérateurs auxiliaires sur les fonctions de poids sur les hypercubes, notés  $\downarrow_i$ , pour  $1 \leq i \leq n$ .

**Définition 26** Soit  $W \in \mathbb{W}_{k,n}$  avec  $1 \leq i \leq n$ . On définit alors la  $i^{\text{e}}$  insertion-restriction de  $W$ , notée  $W \downarrow_i \in \mathbb{W}_{k-1,i}$ , par

$$(W \downarrow_i)_{j_1, \dots, j_{k-1}}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \begin{cases} (-1)^{k-1} W_{j_1, \dots, j_{k-1}, i}(\alpha_1, \dots, \alpha_i, 0, \dots, 0) & \text{si } j_{k-1} < i, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Notons que l'opérateur  $\Delta$  de différence extérieure, tel que défini plus haut, satisfait

$$\Delta : \mathbb{W}_{k,n} \longrightarrow \mathbb{W}_{k+1,n}.$$

**Définition 27** L'opérateur  $\Sigma : \mathbb{W}_{k,n} \longrightarrow \mathbb{W}_{k-1,n}$  est défini par

$$\Sigma W = \Sigma_1 W \downarrow_1 + \Sigma_2 W \downarrow_2 + \dots + \Sigma_i W \downarrow_i + \dots + \Sigma_n W \downarrow_n.$$

Explicitement cette dernière définition s'exprime comme

$$(\Sigma W)_{j_1, \dots, j_{k-1}}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = (-1)^{k-1} \left( \sum_{j_{k-1} < i} \Sigma_i W_{j_1, \dots, j_{k-1}, i}(\alpha_1, \dots, \alpha_i, 0, \dots, 0) \right).$$

Par exemple, si  $k = 1$ , alors  $\Sigma : \mathbb{W}_{1,n} \longrightarrow \mathbb{W}_{0,n}$  est défini pour  $W \in \mathbb{W}_{1,n}$  par

$$\begin{aligned} (\Sigma W)_\emptyset(\alpha_1, \dots, \alpha_n) &= \Sigma_1 W_1(\alpha_1, 0, \dots, 0) + \Sigma_2 W_2(\alpha_1, \alpha_2, 0, \dots, 0) \\ &\quad + \Sigma_3 W_3(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, 0, \dots, 0) \\ &\quad + \dots \\ &\quad + \Sigma_n W_n(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n). \end{aligned}$$

Si  $k = 2$ , alors  $\Sigma : \mathbb{W}_{2,n} \longrightarrow \mathbb{W}_{1,n}$ , est défini pour  $W \in \mathbb{W}_{2,n}$  par

$$\begin{aligned} (\Sigma W)_{j_1}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) &= -\Sigma_{j_1+1} W_{j_1, j_1+1}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{j_1+1}, 0, \dots, 0) \\ &\quad - \Sigma_{j_1+2} W_{j_1, j_1+2}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{j_1+2}, 0, \dots, 0) \\ &\quad \vdots \\ &\quad - \Sigma_n W_{j_1, n}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n). \end{aligned}$$

Si  $k = 3$ , alors  $\Sigma : \mathbb{W}_{3,n} \longrightarrow \mathbb{W}_{2,n}$ , est défini pour  $W \in \mathbb{W}_{3,n}$  par

$$\begin{aligned} (\Sigma W)_{j_1, j_2}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) &= \Sigma_{j_2+1} W_{j_1, j_2, j_2+1}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{j_2+1}, 0, \dots, 0) \\ &\quad + \Sigma_{j_2+2} W_{j_1, j_2, j_2+2}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{j_2+2}, 0, \dots, 0) \\ &\quad + \dots \\ &\quad + \Sigma_n W_{j_1, j_2, n}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n). \end{aligned}$$

$\vdots$

Si  $k = n$ , alors  $\Sigma : \mathbb{W}_{n,n} \longrightarrow \mathbb{W}_{n-1,n}$ , est défini pour  $W \in \mathbb{W}_{n,n}$  par

$$\begin{aligned} (\Sigma W)_{j_1, \dots, j_{n-1}}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) &= (-1)^{n-1} \left( \sum_{j_{n-1} < i} \Sigma_i W_{j_1, \dots, j_{n-1}, i}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \right) \\ &= \begin{cases} (-1)^{n-1} \Sigma_n W_{j_1, \dots, j_{n-1}, n}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) & \text{si } j_{n-1} < n, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

À ce stade-ci, nous sommes en mesure d'énoncer notre version discrète du lemme de Poincaré inspirée de (Mansfield et Hydon, 2007).

**Théorème 11** *Soit  $W \in \mathbb{W}_{k,n}$  et  $1 \leq k \leq n$ . Alors  $W$  est fermée si et seulement si  $W$  est exacte.*

Notre preuve est constructive et explicite contrairement à la preuve par récurrence développée par (Mansfield et Hydon, 2007) dans le contexte des formes de différences.

**Preuve.** Comme nous l'avons déjà vu  $W = \Delta\Phi \implies \Delta W = \Delta^2\Phi = 0$ . Afin d'établir la réciproque, supposons que  $\Delta W = 0$  et montrons que  $W$  est exacte. Il suffit de voir que

$$\Delta\Sigma W + \Sigma\Delta W = W.$$

À cet effet, en prenant  $\Phi = \Sigma W$ , on trouvera bien

$$\Delta\Phi = \Delta\Sigma W = \Delta\Sigma W + 0 = \Delta\Sigma W + \Sigma 0 = \Delta\Sigma W + \Sigma\Delta W = W$$

On a d'une part,

$$\begin{aligned} & (\Delta\Sigma W)_{i_1, \dots, i_k}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \\ &= \sum_{1 \leq \nu \leq k} (-1)^{\nu-1} \Delta_{i_\nu}(\Sigma W)_{i_1, \dots, \widehat{i_\nu}, \dots, i_k}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \\ &= \sum_{1 \leq \nu \leq k, 1 \leq i \leq n} (-1)^{\nu-1+k-1} \Delta_{i_\nu} \Sigma_i W_{i_1, \dots, \widehat{i_\nu}, \dots, i_k, i}(\alpha_1, \dots, \alpha_i, 0, \dots, 0) \\ &= \sum_{1 \leq \nu \leq k, i_k < i \leq n} (-1)^{\nu-1+k-1} \Delta_{i_\nu} \Sigma_i W_{i_1, \dots, \widehat{i_\nu}, \dots, i_k, i}(\alpha_1, \dots, \alpha_i, 0, \dots, 0) \\ &\quad + \sum_{\nu=k, i=i_k} (-1)^{2k-2} \Delta_{i_k} \Sigma_i W_{i_1, \dots, i_{k-1}, \widehat{i_k}, i}(\alpha_1, \dots, \alpha_i, 0, \dots, 0) \\ &= S + \Delta_{i_k} \Sigma_{i_k} W_{i_1, \dots, i_k}(\alpha_1, \dots, \alpha_{i_k}, 0, \dots, 0). \quad \text{disons} \\ &= S + W_{i_1, \dots, i_k}(\alpha_1, \dots, \alpha_{i_k}, 0, \dots, 0). \end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} & (\Sigma\Delta W)_{i_1, \dots, i_k}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \\ &= \sum_{i_k < i \leq n} \Sigma_i (-1)^k (\Delta W)_{i_1, \dots, i_k, i}(\alpha_1, \dots, \alpha_i, 0, \dots, 0) \\ &= \sum_{i_k < i \leq n, 1 \leq \nu \leq k} (-1)^{k+\nu-1} \Sigma_i \Delta_{i_\nu} W_{i_1, \dots, \widehat{i_\nu}, \dots, i_k, i}(\alpha_1, \dots, \alpha_i, 0, \dots, 0) \\ &\quad + \sum_{i_k < i \leq n} (-1)^{2k} \Sigma_i \Delta_i W_{i_1, \dots, i_k, i}(\alpha_1, \dots, \alpha_i, 0, \dots, 0) \\ &= -S + \sum_{i_k < i \leq n} \Sigma_i \Delta_i W_{i_1, \dots, i_k}(\alpha_1, \dots, \alpha_i, 0, \dots, 0). \end{aligned}$$

On en déduit que.

$$\begin{aligned}
& (\Delta \Sigma W)_{i_1, \dots, i_k}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) + (\Sigma \Delta W)_{i_1, \dots, i_k}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \\
&= W_{i_1, \dots, i_k}(\alpha_1, \dots, \alpha_{i_k}, 0, \dots, 0) + \sum_{i_k < i \leq n} \Sigma_i \Delta_i W_{i_1, \dots, i_k}(\alpha_1, \dots, \alpha_i, 0, \dots, 0) \\
&= W_{i_1, \dots, i_k}(\alpha_1, \dots, \alpha_{i_k}, 0, \dots, 0) \\
&\quad + \sum_{i_k < i \leq n} (W_{i_1, \dots, i_k}(\alpha_1, \dots, \alpha_i, 0, \dots, 0) - W_{i_1, \dots, i_k}(\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, 0, \dots, 0)) \\
&= W_{i_1, \dots, i_k}(\alpha_1, \dots, \alpha_n).
\end{aligned}$$

■

**Théorème 12** *Si  $W$  est fermée, alors pour tout complexe hypercubique  $\mathbf{P}$ , on a*

$$W(\mathbf{P}) = (\Sigma W)(\partial \mathbf{P}).$$

**Preuve.** Il suffit d'invoquer la version discrète du théorème de Stokes énoncée un peu plus tôt.

$$(\Delta w)(\mathbf{P}) = w(\partial \mathbf{P}),$$

au cas où  $w = \Sigma W$ . Après investigation, il apparaît que  $\Delta w = \Delta \Sigma W = W$ , découlant de la démonstration de la version discrète du lemme de Poincaré. ■

**Corollaire 6** *Toute fonction de poids  $\Phi : \mathcal{H}_{k-1, n} \longrightarrow \mathbb{R}$  satisfaisant  $W(\mathbf{P}) = \Phi(\partial \mathbf{P})$  est de la forme*

$$\Phi = \Sigma W + \Theta,$$

où  $\Theta$  est une fonction de poids exacte quelconque, c'est-à-dire de la forme

$$\Theta = \Delta \Omega,$$

où  $\Omega : \mathcal{H}_{k-2, n} \longrightarrow \mathbb{R}$ .

**Preuve.** Par le Théorème 12, on sait que  $\Sigma W$  satisfait

$$W(\mathbf{P}) = (\Sigma W)(\partial \mathbf{P}). \quad (6.3)$$

De plus, par hypothèse

$$W(\mathbf{P}) = \Phi(\partial\mathbf{P}). \quad (6.4)$$

Considérons la fonction de poids

$$\Theta = \Phi - \Sigma W.$$

Par soustraction de (6.3) à (6.4), on a

$$0 = (\Phi - \Sigma W)(\partial\mathbf{P}) = \Theta(\partial\mathbf{P}),$$

pour tout  $\partial\mathbf{P}$ . Ceci implique que  $\Theta$  est fermée, donc exacte par le lemme de Poincaré discret tel qu'énoncé au Théorème 11. C'est-à-dire qu'il existe  $\Omega$  telle que  $\Theta = \Delta\Omega$ . ■

Le Théorème 12 donne lieu à de nombreux exemples de calcul de poids de complexes hypercubiques pour des valeurs  $k \leq n$  en dimension quelconque  $n$ . En particulier, en prenant  $k = n = 2$  dans le Théorème 12, on obtient un algorithme qui permet, comme au Chapitre 2, de calculer par exemple, le poids d'un polyomino à partir de son contour.

### 6.3 Généralisation des $V$ , $H$ et $VH$ algorithmes

Nous généralisons ici, indépendamment du choix particulier de  $\Sigma W$  dans le Théorème 12, les résultats de la Section 6.2 en posant  $k = n$  pour  $n$  quelconque. Pour ce faire, revenons donc aux formes différentielles  $n$ -formes dans  $\mathbb{R}^n$ . Soit,

$$f = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_n \leq n} f_{i_1, \dots, i_n} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_n} = f_{1, \dots, n} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n.$$

On a  $df = 0$ , car

$$\begin{aligned} df &= (df_{1, \dots, n}) \wedge dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n \\ &= \left( \frac{\partial f_{1, \dots, n}}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f_{1, \dots, n}}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial f_{1, \dots, n}}{\partial x_n} dx_n \right) \wedge dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n \\ &= 0 + 0 + \dots + 0 = 0. \end{aligned}$$

Ceci permet de construire une famille d'exemples généralisant les  $V$ ,  $H$  et  $VH$  - *algorithmes* vu au Chapitre 2 provenant des cas pour lesquels  $f$  est une  $n$ -forme dans  $\mathbb{R}^n$ , c'est-à-dire,

$f = f_{1,2,\dots,n}(x_1, \dots, x_n) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$ . On veut calculer

$$\int_H f_{1,2,\dots,n}(x_1, \dots, x_n) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n,$$

en fonction de la frontière  $\partial H$ . Dans ce cas, il faut alors chercher des  $(n-1)$ -formes

$$\begin{aligned} \omega &= \omega_{2,3,\dots,n} dx_2 \wedge dx_3 \wedge \dots \wedge dx_n + \omega_{1,3,\dots,n} dx_1 \wedge dx_3 \wedge \dots \wedge dx_n \\ &+ \dots + \omega_{1,2,\dots,n-1} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{n-1}, \end{aligned}$$

telles que  $d\omega = f$ . On a,

$$\begin{aligned} d\omega &= \frac{\partial \omega_{2,3,\dots,n}}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n - \frac{\partial \omega_{1,3,\dots,n}}{\partial x_2} dx_1 \wedge dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n \\ &+ \frac{\partial \omega_{1,2,4,\dots,n}}{\partial x_3} dx_1 \wedge dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n - \dots \end{aligned}$$

Ceci équivaut à trouver  $\omega_{2,3,\dots,n}, \omega_{1,3,\dots,n}, \dots, \omega_{1,2,\dots,n-1}$  telles que

$$\frac{\partial \omega_{2,3,\dots,n}}{\partial x_1} - \frac{\partial \omega_{1,3,\dots,n}}{\partial x_2} + \frac{\partial \omega_{1,2,4,\dots,n}}{\partial x_3} - \dots = f_{1,2,\dots,n}.$$

- Solution 1 ( $x_1$ -algo) : soit  $\omega_{2,3,\dots,n}(x_1, \dots, x_n) = \int^{x_1} f_{1,2,\dots,n}(x_1, \dots, x_n) dx_1$   
et  $0 = \omega_{1,3,\dots,n} = \omega_{1,2,4,\dots,n} = \dots = \omega_{1,2,\dots,n-1}$ .
- Solution 2 ( $x_2$ -algo) : soit  $\omega_{1,3,\dots,n}(x_1, \dots, x_n) = - \int^{x_2} f_{1,2,\dots,n}(x_1, \dots, x_n) dx_2$   
et  $0 = \omega_{2,3,\dots,n} = \omega_{1,2,4,\dots,n} = \dots = \omega_{1,2,\dots,n-1}$ .
- $\vdots$
- Solution  $i$  ( $x_i$ -algo) : soit  $\omega_{1,\dots,\widehat{i},\dots,n}(x_1, \dots, x_n) = (-1)^{i-1} \int^{x_i} f_{1,2,\dots,n}(x_1, \dots, x_n) dx_i$   
et  $0 = \omega_{2,3,\dots,i,\dots,n} = \omega_{1,3,\dots,i,\dots,n} = \dots = \omega_{1,2,\dots,i,\dots,n-1}$ .
- $\vdots$
- Solution  $n$  ( $x_n$ -algo) : soit  $\omega_{1,2,\dots,n-1}(x_1, \dots, x_n) = (-1)^n \int^{x_n} f_{1,2,\dots,n}(x_1, \dots, x_n) dx_n$   
et  $0 = \omega_{2,\dots,n} = \omega_{1,3,\dots,n} = \dots = \omega_{1,\dots,n-2,n}$ .

Notons qu'en posant  $x = x_1$  et  $y = x_2$ , le  $x_1$ -algo correspond au  $H$ -algorithme alors que le  $x_2$ -algo correspond au  $V$ -algorithme développé au Chapitre 2.

L'analogue de l'algorithme mixte (*VH-algorithme*) dans le cas d'une dimension quelconque  $n$ , fait appel à toutes les variables à la fois. Tout comme dans la démonstration générale du lemme de Poincaré, le candidat pour  $\omega$  prend alors la forme

$$\begin{aligned}\omega &= x_1 F(x_1, \dots, x_n) dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n - x_2 F(x_1, \dots, x_n) dx_1 \wedge dx_3 \wedge \dots \wedge dx_n \\ &\quad + x_3 F(x_1, \dots, x_n) dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_4 \wedge \dots \wedge dx_n \\ &\quad + \dots - x_n F(x_1, \dots, x_n) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{n-1},\end{aligned}$$

$$\text{où } F(x_1, \dots, x_n) = \int_0^1 f_{1, \dots, n}(sx_1, \dots, sx_n) s^{n-1} ds.$$

Avec ce choix de  $\omega$ , on a bien  $d\omega = f$ . En effet,

$$\begin{aligned}d\omega &= d[x_1 F dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n - x_2 F dx_1 \wedge dx_3 \wedge \dots \wedge dx_n + \dots - x_n F dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{n-1}] \\ &= \frac{\partial(x_1 F)}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n - \left( \frac{\partial(x_2 F)}{\partial x_2} \right) dx_2 \wedge dx_1 \wedge dx_3 \wedge \dots \wedge dx_n \\ &\quad + \left( \frac{\partial(x_3 F)}{\partial x_3} \right) dx_3 \wedge dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_4 \wedge \dots \wedge dx_n \\ &\quad - \dots + (-1)^{n-1} \left( \frac{\partial(x_n F)}{\partial x_n} \right) dx_n \wedge dx_1 \wedge dx_2 \wedge \dots \wedge dx_{n-1} \\ &= \left( \frac{\partial(x_1 F)}{\partial x_1} \right) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n + \left( \frac{\partial(x_2 F)}{\partial x_2} \right) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n \\ &\quad + \dots + \left( \frac{\partial(x_n F)}{\partial x_n} \right) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n \\ &= \left( \frac{\partial(x_1 F)}{\partial x_1} + \frac{\partial(x_2 F)}{\partial x_2} + \dots + \frac{\partial(x_n F)}{\partial x_n} \right) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n \\ &= \left( \left[ F + x_1 \frac{\partial F}{\partial x_1} \right] + \left[ F + x_2 \frac{\partial F}{\partial x_2} \right] + \dots + \left[ F + x_n \frac{\partial F}{\partial x_n} \right] \right) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n \\ &= \left( nF + x_1 \frac{\partial F}{\partial x_1} + \dots + x_n \frac{\partial F}{\partial x_n} \right) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n.\end{aligned}$$

Il suffit donc de vérifier que

$$nF + x_1 \frac{\partial F}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial F}{\partial x_2} + \dots + x_n \frac{\partial F}{\partial x_n} = f_{1,2,\dots,n},$$

$$\text{dans le cas où } F(x_1, \dots, x_n) = \int_0^1 f_{1,2,\dots,n}(sx_1, \dots, sx_n) s^{n-1} ds.$$



Calculons pour  $1 \leq i \leq n$ ,

$$\begin{aligned}
 x_i \frac{\partial F}{\partial x_i} &= x_i \frac{\partial}{\partial x_i} \int_0^1 f_{1,2,\dots,n}(sx_1, \dots, sx_n) s^{n-1} ds \\
 &= x_i \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x_i} [f_{1,2,\dots,n}(sx_1, \dots, sx_n)] s^{n-1} ds \\
 &= x_i \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(sx_1, \dots, sx_i, \dots, sx_n) \frac{\partial(sx_i)}{\partial x_i} s^{n-1} ds \\
 &= x_i \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(sx_1, \dots, sx_i, \dots, sx_n) s^n ds.
 \end{aligned}$$

On a alors,

$$\begin{aligned}
 nF + x_1 \frac{\partial F}{\partial x_1} + \dots + x_n \frac{\partial F}{\partial x_n} \\
 &= \int_0^1 (n f_{1,\dots,n}(sx_1, \dots, sx_n) s^{n-1}) \\
 &= \int_0^1 \left( x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(sx_1, \dots, sx_n) + \dots + x_n \frac{\partial f}{\partial x_n}(sx_1, \dots, sx_n) \right) s^n ds.
 \end{aligned}$$

Assurons nous que le dernier membre de cette dernière égalité est bien équivalent à

$$\int_0^1 \left( \frac{d}{ds} [f_{1,\dots,n}(sx_1, \dots, sx_n)] s^n \right) ds = f_{1,\dots,n}(x_1, \dots, x_n).$$

En effet,

$$\begin{aligned}
 &\frac{d}{ds} (f_{1,2,\dots,n}(sx_1, \dots, sx_n) s^n) \\
 &= \left( \frac{d}{ds} f_{1,\dots,n}(sx_1, \dots, sx_n) \right) s^n + f_{1,\dots,n}(sx_1, \dots, sx_n) \frac{d}{ds} s^n \\
 &= \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}(sx_1, \dots, sx_n) x_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(sx_1, \dots, sx_n) x_n \right) s^n + n s^{n-1} f_{1,\dots,n}(sx_1, \dots, sx_n).
 \end{aligned}$$

En résumé, l'algorithme mixte pour  $W(H) = \int_H f_{1,\dots,n}(x_1, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n$  correspondra à prendre,

$$\Phi(\partial H) = \int_{\partial H} x_1 F dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n - x_2 F dx_1 \wedge dx_3 \wedge \dots \wedge dx_n + \dots$$

Plus généralement, en utilisant le Théorème 12 et le Corollaire 6, on obtient une famille infinie d'algorithmes pour les fonctions de poids  $W \in \mathbb{W}_{n,n}$ . Remarquons d'abord que de telles fonctions de poids sont nécessairement fermées. En effet, puisque

$$W = (W_{i_1, \dots, i_n}(\alpha_1, \dots, \alpha_n))_{1 \leq i_1 < \dots < i_n \leq n},$$

on a que  $W$  se ramène à une seule fonction  $W = W_{1,2,\dots,n}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ . Dans ce cas, on a alors

$$\begin{aligned} (\Delta W)_{j_1, \dots, j_{n+1}}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) &= \sum_{\nu=1}^{n+1} (-1)^{\nu-1} \Delta_{j_\nu} W_{j_1, \dots, \widehat{j_\nu}, \dots, j_{n+1}}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \\ &= 0 + \dots + 0 + (-1)^n \Delta_{j_{n+1}} W_{j_1, \dots, j_n, \widehat{j_{n+1}}} \\ &= 0 \quad \text{car } j_{n+1} > n. \end{aligned}$$

Par le Théorème 12, on peut choisir une fonction de poids  $\Phi$  telle que  $W(H) = \Phi(\partial H)$ , en prenant  $\Sigma W \in \mathbb{W}_{n-1,n}$ . Plus précisément,

$$\begin{aligned} (\Sigma W)_{j_1, \dots, j_{n-1}}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) &= \begin{cases} (-1)^{n-1} \Sigma_n W_{j_1, \dots, j_{n-1}, n}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) & \text{si } j_{n-1} < n, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \\ &= \begin{cases} (-1)^{n-1} \Sigma_n W_{1,2,\dots,n}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) & \text{si } (j_1, j_2, \dots, j_{n-1}) = (1, 2, \dots, n-1), \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \\ &= \begin{cases} (-1)^{n-1} \sum_{\nu_n=0}^{\alpha_n-1} W_{1,2,\dots,n}(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, \nu_n) & \text{si } (j_1, \dots, j_{n-1}) = (1, \dots, n-1), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

Par le Corollaire 6, la forme générale pour  $\Phi$ , telle que  $W(H) = \Phi(\partial H)$ , est donc de la forme

$$\Phi = \Sigma W + \Theta,$$

où  $\Sigma W$  est donné par le dernier membre de droite de l'égalité précédente et

$$\Theta = \Delta \Omega,$$

avec  $\Omega : \mathcal{H}_{n-2,n} \longrightarrow \mathbb{R}$  quelconque.

Notons que si  $n = 2$  alors,  $\Theta = \Delta \Omega$ , où  $\Omega : \mathcal{H}_{0,2} \longrightarrow \mathbb{R}$ , c'est-à-dire,  $\Omega : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{R}$ .

Posons donc  $\Omega = \Omega(\alpha_1, \alpha_2)$ . Alors,  $\Theta : \mathcal{H}_{1,2} \longrightarrow \mathbb{R}$  où

$$\Theta_1 = (\Delta \Omega)_1 = (-1)^{1-1} \Delta_1 \Omega(\alpha_1, \alpha_2) = \Omega(\alpha_1 + 1, \alpha_2) - \Omega(\alpha_1, \alpha_2),$$

$$\Theta_2 = (\Delta \Omega)_2 = (-1)^{1-1} \Delta_2 \Omega(\alpha_1, \alpha_2) = \Omega(\alpha_1, \alpha_2 + 1) - \Omega(\alpha_1, \alpha_2),$$

ce qui correspond à ce que nous avons vu au Chapitre 2 en tenant compte du contexte décrit par la Figure 6.2.

## 6.4 Cas spéciaux

Revenons au Théorème 12 avec  $k \leq n$ . Concentrons nous maintenant sur quelques exemples précis.

Cas 1 : Considérons d'abord le cas linéaire en  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ , où

$$W(H) = W_{i_1, \dots, i_k}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \sum_{r=1}^n c_r^{(i_1, \dots, i_k)} \alpha_r.$$

La condition  $\Delta W = 0$  se traduit par

$$0 = (\Delta W)_{j_1, \dots, j_{k+1}}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \sum_{\nu=1}^{k+1} (-1)^{\nu-1} \Delta_{j_\nu} \left( \sum_{r=1}^n c_r^{(j_1, \dots, \widehat{j_\nu}, \dots, j_{k+1})} \alpha_r \right).$$

Autrement dit,  $W$  est fermée si et seulement si on a la famille des égalités

$$c_{j_1}^{(j_2, \dots, j_{k+1})} - c_{j_2}^{(j_1, j_3, \dots, j_{k+1})} + c_{j_3}^{(j_1, j_2, j_4, \dots, j_{k+1})} - \dots = 0.$$

En particulier, en prenant  $k = 1$ ,  $W \in \mathbb{W}_{1,n}$  et pour  $H \in \mathcal{H}_{1,n}$ , on a

$$W(H) = W_{i_1}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = c_1^{(i_1)} \alpha_1 + c_2^{(i_1)} \alpha_2 + \dots + c_n^{(i_1)} \alpha_n.$$

$W$  est fermée si et seulement si  $c_{j_1}^{j_2} - c_{j_2}^{j_1} = 0$ . C'est-à-dire que la matrice des  $c_\alpha^\beta$  est symétrique.

Dans ce cas,  $\Sigma W \in \mathbb{W}_{0,n}$  est donnée par la formule

$$\begin{aligned} (\Sigma W)_\emptyset(\alpha_1, \dots, \alpha_n) &= \Sigma_1(c_1^{(1)} \alpha_1) + \Sigma_2(c_1^{(2)} \alpha_1 + c_2^{(2)} \alpha_2) + \Sigma_3(c_1^{(3)} \alpha_1 + c_2^{(3)} \alpha_2 + c_3^{(3)} \alpha_3) \\ &\quad \dots + \Sigma_n(c_1^{(n)} \alpha_1 + \dots + c_n^{(n)} \alpha_n). \end{aligned}$$

Cas 2 : Le deuxième cas étudié consiste à prendre

$$W_{i_1, \dots, i_k}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = c_{i_1, \dots, i_k},$$

qui ne dépend que des directions  $i_1, \dots, i_k$  de l'hypercube  $H$ . La condition  $\Delta W = 0$  est alors toujours satisfaite puisque

$$(\Delta W)_{j_1, \dots, j_{k+1}}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \sum_{\nu=1}^{k+1} (-1)^{\nu-1} \Delta_{j_\nu} c_{j_1, \dots, \widehat{j_\nu}, \dots, j_{k+1}} = 0.$$

Ainsi, la forme est toujours fermée et on a

$$\begin{aligned}
 (\Sigma W)_{j_1, \dots, j_{k-1}}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) &= (-1)^{k-1} \sum_{j_{k-1} < i} \Sigma_i W_{j_1, \dots, j_{k-1}, i}(\alpha_1, \dots, \alpha_i, 0, \dots, 0) \\
 &= (-1)^{k-1} \sum_{j_{k-1} < i} \Sigma_i c_{j_1, \dots, j_{k-1}, i} \\
 &= (-1)^{k-1} \sum_{j_{k-1} < i} \alpha_i c_{j_1, \dots, j_{k-1}, i},
 \end{aligned}$$

car pour toute constante  $c$ , on a  $\Sigma_i c = \alpha_i c$ .

Par exemple, supposons  $c_{i_1, \dots, i_k} = 1$  pour tout  $i_1, \dots, i_k$  (volume d'un hypercube). Alors  $W(\mathbf{P})$  correspond au volume signé du complexe hypercubique  $\mathbf{P}$ . En d'autres termes, si  $\mathbf{P} = \sum_{i=1}^m n_i H_i$  alors  $W(\mathbf{P}) = \sum_{i=1}^m n_i$ . On obtient alors,

$$(\Sigma W)_{j_1, \dots, j_{k-1}}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = (-1)^{k-1} \sum_{i > j_{k-1}} \alpha_i = (-1)^{k-1} (\alpha_{j_{k-1}+1} + \dots + \alpha_n).$$

Ceci généralise le *H-algorithme* pour l'aire d'un polyomino développé au Chapitre 2.

Cas 3 : Finalement, le troisième cas consiste à choisir

$$W_{i_1, \dots, i_k}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = f(\alpha_1, \dots, \alpha_n),$$

qui ne dépend que du coin principal des hypercubes. La condition  $\Delta W = 0$  est alors traduite par

$$0 = (\Delta W)_{j_1, \dots, j_{k+1}}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \sum_{\nu=1}^{k+1} (-1)^{\nu-1} \Delta_{j_\nu} f(\alpha_1, \dots, \alpha_n).$$

C'est-à-dire,

$$\Delta_{j_1} f(\alpha_1, \dots, \alpha_n) - \Delta_{j_2} f(\alpha_1, \dots, \alpha_n) + \Delta_{j_3} f(\alpha_1, \dots, \alpha_n) - \dots + (-1)^k \Delta_{j_{k+1}} f(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = 0.$$

Par exemple, si  $k = 1$  alors  $\Delta W = 0$  si et seulement si

$$\Delta_{j_1} f(\alpha_1, \dots, \alpha_n) - \Delta_{j_2} f(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = 0.$$

C'est-à-dire  $i < j \implies \Delta_i f = \Delta_j f$ . Autrement dit,

$$f(\alpha_1, \dots, \alpha_i + 1, \dots, \alpha_n) - f(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = f(\alpha_1, \dots, \alpha_j + 1, \dots, \alpha_n) - f(\alpha_1, \dots, \alpha_n).$$

C'est-à-dire  $\forall i < j : f(\alpha_1, \dots, \alpha_i + 1, \dots, \alpha_n) - f(\alpha_1, \dots, \alpha_j + 1, \dots, \alpha_n) = 0$ . En particulier, pour  $i = 1, j = 2$ , on a

$$f(\alpha_1 + 1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = f(\alpha_1, \alpha_2 + 1, \dots, \alpha_n).$$

Donc par translation,  $f(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = f(\alpha_1 - 1, \alpha_2 + 1, \dots, \alpha_n)$  et en itérant ce processus, on trouve,

$$f(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = f(0, \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n).$$

En continuant avec  $i = 2, j = 3$ , et ainsi de suite, on obtient de proche en proche

$$f(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = f(0, \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n) = f(0, 0, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_4, \dots, \alpha_n) = \dots = f(0, 0, \dots, 0, \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n) = \varphi(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n), \text{ disons.}$$

Ainsi  $\Delta W = 0$  si et seulement si  $W_i(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \varphi(\alpha_1 + \dots + \alpha_n)$ ,  $1 \leq i \leq n$ . Dans ce cas,

$$\begin{aligned} (\Sigma W)_\emptyset(\alpha_1, \dots, \alpha_n) &= \sum_{1 \leq i \leq n} \Sigma_i W_i(\alpha_1, \dots, \alpha_i, 0, \dots, 0) \\ &= \sum_{1 \leq i \leq n} \Sigma_i \varphi(\alpha_1 + \dots + \alpha_i) \\ &= \sum_{1 \leq i \leq n} \sum_{\nu_i=0}^{\alpha_i-1} \varphi(\alpha_1 + \dots + \alpha_{i-1} + \nu_i), \end{aligned}$$

si tous les  $\alpha_i > 0$ . Des expressions semblables sont valides dans le cas où certains  $\alpha_i$  sont nuls ou négatifs.

Ce chapitre ouvre la voie à l'étude d'une multitude d'autres statistiques associées aux complexes hypercubiques en fonction de paramètres associés à leur frontière.

## CONCLUSION

La discipline de la géométrie discrète vise à définir et utiliser un ensemble de notions de la géométrie classique qui ont préalablement été transposées dans le cadre intrinsèquement discret d'objets manipulables par l'outil informatique. Les objets d'étude de la géométrie discrète sont fondamentaux en analyse et traitement d'images dont les domaines d'applications couvrent l'infographie médicale, la télédétection par satellite, la morphologie, la météorologie, la géomorphologie, la synthèse d'images sans oublier les applications militaires et plusieurs autres. De nouvelles motivations existent également en microscopie électronique où il est possible de reconstruire des structures cristallines.

Dans cette thèse, nous avons développé des algorithmes reliés au calcul de diverses statistiques descriptives d'objets discrets, et avons structuré la théorie y faisant référence. Pour ce faire, dans les Chapitres 2 et 6, nous avons utilisé en particulier des versions discrètes des théorèmes de Green et Stokes ainsi que certains concepts relevant de la théorie classique de la combinatoire des mots. Au Chapitre 3, nous avons également montré que les ensembles discrets d'inertie minimale sont des quasi-disques discrets fortement-convexes, donc en l'occurrence des polyominos. Un algorithme permettant de les engendrer a aussi été développé. Ensuite, au Chapitre 4, les propriétés de contours d'ensembles discrets ont été abordées : en particulier nous avons proposé une nouvelle démonstration du résultat de Daurat et Nivat qui met en relation le nombre  $S$  de points saillants et le nombre  $R$  de points rentrants d'un polyomino par l'équation  $S - R = 4$ . Un résultat analogue a également été démontré pour les réseaux hexagonaux. Au Chapitre 5, l'étude des opérations de mélange parfait appliquées aux chemins discrets a donné lieu à quelques propriétés géométriques intéressantes : entre autre nous avons prouvé que, sous l'action du mélange parfait, les chemins fermés restent fermés, l'aire ainsi que le périmètre doublent et le centre de gravité subit une rotation de  $45^\circ$  avec un facteur de similitude de  $\sqrt{2}$ . Une normalisation de cette opération de mélange nous a permis d'engendrer des courbes fractales du type courbe de

dragon et d'analyser certains de leurs invariants. Finalement, nous avons généralisé ces résultats à d'autres types d'opérations de mélange appliqués à des chemins formés d'angles  $\frac{2k\pi}{N}$ .

Ces résultats promettent d'être très utiles en analyse et traitement d'images ainsi qu'en reconstruction d'objets plus généraux à partir de données partielles. On peut prévoir leur utilisation dans les nombreux domaines d'applications mentionnés ci-haut.

Outre les problèmes ouverts énoncés à la fin de chacun des chapitres, mentionnons quelques autres perspectives générales de recherche.

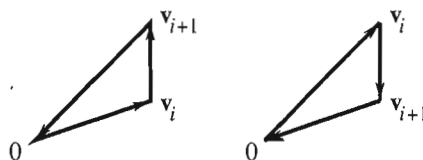
Le but principal est de poursuivre l'étude d'approches nouvelles qui permettent de développer divers algorithmes pour le traitement et l'analyse d'objets plus généraux. Par exemple, l'utilisation de versions discrètes du théorème de Stokes conduit à de nouveaux algorithmes permettant d'évaluer diverses statistiques reliées aux ensembles discrets à partir de données partielles. Cette approche est très prometteuse et doit être poursuivie. Elle a l'avantage de ramener le calcul de certains paramètres, en dimension  $n$ , à des calculs correspondants, en dimension  $n - 1$ . Un autre problème consiste à étendre aux dimensions supérieures, en l'occurrence en dimension 3 pour des fins pratiques, les résultats obtenus au Chapitre 3 concernant l'étude des ensembles discrets d'inertie minimale. Dans le contexte des hypercubes d'un réseau discret, ces ensembles sont regroupés de façon optimale autour de leur centre de gravité. Ils sont convexes au sens discret, dans toutes les directions. Une difficulté intrinsèque est la notion de convexité : en effet, les seules réunions d'hypercubes convexes au sens euclidien usuel sont les pavés multidimensionnels. La convexité selon une direction fixée est aussi bien définie et coïncide encore avec la notion classique. Il serait envisageable, grâce à cette approche, de développer des algorithmes de reconstruction et d'analyse d'objets discrets multidimensionnels, à partir de leur projection selon certaines familles de directions.

En effet, les problèmes ouverts et la généralisation de certains résultats à de nouveaux contextes démontrent bien l'importance de poursuivre ces recherches.

## APPENDICE A

### 0.1 Preuve géométrique de $\iint_P f(x, y) dx dy = \int_\gamma F(x, y)(xdy - ydx)$ .

Soit  $v_0, v_1, \dots, v_n$  les sommets successifs du contour  $\gamma$  d'un polyomino  $P$ . Pour chaque paire de sommets consécutifs  $v_i$  et  $v_{i+1}$  sur  $\gamma$ , considérons le triangle  $T_i$  dont les sommets, dans l'ordre, sont respectivement  $0, v_i$  et  $v_{i+1}$ . Le triangle  $T_i$  est considéré positif si allant du segment  $[0, v_i]$  au segment  $[0, v_{i+1}]$  on doit tourner selon un angle positif, autrement  $T_i$  est négatif (voir Figure 0.3).



**Figure 0.3** Un triangle orienté positivement et négativement.

On a forcément,

$$\iint_P f(x, y) dx dy = \sum_{i=0}^{n-1} \iint_{T_i} f(x, y) dx dy.$$

Maintenant posons  $v_i = (x_i, y_i)$  et  $v_{i+1} = (x_{i+1}, y_{i+1}) = (x_i + \Delta x_i, y_i + \Delta y_i)$  et prenons la paramétrisation suivante pour le triangle  $T_i$  :

$$x = x(s, t) = s(x_i + t\Delta x_i), \quad y = y(s, t) = s(y_i + t\Delta y_i),$$

où  $0 \leq s \leq 1$  et  $0 \leq t \leq 1$ . Le Jacobien de cette transformation est donné par

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(s, t)} = s(x_i \Delta y_i - y_i \Delta x_i).$$

En effectuant un changement de variables pour l'intégrale double, on a pour  $i = 0, 1, \dots, n-1$  :

$$\begin{aligned} \iint_{T_i} f(x, y) dx dy &= \int_0^1 \int_0^1 f(x(s, t), y(s, t)) \frac{\partial(x, y)}{\partial(s, t)} ds dt \\ &= \int_0^1 \int_0^1 f(s(x_i + t\Delta x_i), s(y_i + t\Delta y_i)) s(x_i \Delta y_i - y_i \Delta x_i) ds dt \\ &= \int_0^1 F(x_i + t\Delta x_i, y_i + t\Delta y_i) (x_i \Delta y_i - y_i \Delta x_i) dt \\ &= \int_{[v_i, v_{i+1}]} F(x, y) (xdy - ydx). \blacksquare \end{aligned}$$



Notons que cette preuve reste générale et qu'elle peut être adaptée à n'importe quelle courbe  $\gamma$  continûment différentiable par morceaux.

## 0.2 Le résultat d'un programme Maple sur un polyomino

Il est simple de faire des programmes Maple (non optimisés) engendrant certains des algorithmes incrémentaux développés précédemment. Nous donnons ici le résultat d'un tel programme, qui est décrit à la Section 0.3, sur le polyomino d'allure humaine (voir Figure 0.4) représenté par le mot

$$w = aabbbab\bar{b}aaab\bar{a}abbbbaaab\bar{a}\bar{a}\bar{a}b\bar{a}\bar{b}\bar{a}\bar{a}b\bar{b}baaabbb\bar{b}\bar{a}\bar{b}.$$

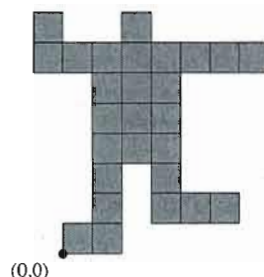


Figure 0.4 Polyomino d'allure humaine.

Périmètre : 44

Aire : 27

Centre de gravité :  $[47/18, 239/54], [2.611111111, 4.425925926]$

Moment d'inertie :  $11719/54, 217.0185185$

Projections verticales :  $2q^{-1} + 2 + 7q + 5q^2 + 6q^3 + 2q^4 + 2q^5 + q^6$

Projections horizontales :  $2 + 4t + 2t^2 + 3t^3 + 3t^4 + 3t^5 + 8t^6 + 2t^7$

## 0.3 Programmes Maple

Nous présentons ici, deux petits programmes permettant de calculer certaines statistiques sur les polyominos. Bien entendu, ces programmes ne sont pas nécessairement optimaux.

### 0.3.1 Calcul de la distance moyenne à l'origine d'un point d'un polyomino

Dans le programme qui suit, la procédure *calculeDM* prend en entrée les trois paramètres qui sont le mot  $w$  codant le contour du polyomino ainsi que le point de départ  $s = (x_0, y_0)$ .

```
f1 := proc(x, y)
  if y = 0 then evalf(1/2*x*abs(x))
  else evalf(1/2*x*sqrt(x^2 + y^2)
    + 1/2*y^2*log(x + sqrt(x^2 + y^2))
    - 1/4*y^2*log(y^2))
  end if
end proc

f2 := proc(x, y)
  if x = 0 then evalf(1/2*y*abs(y))
  else evalf(1/2*y*sqrt(x^2 + y^2)
    + 1/2*x^2*log(y + sqrt(x^2 + y^2))
    - 1/4*x^2*log(x^2))
  end if
end proc

kk := 1

calculeDM := proc(mot, x0, y0)
local k, s, X, Y, cummDM, cummA, A, DM;
global kk;
  s := convert(mot, string);
  X := x0;
  Y := y0;
  cummDM := 0;
  cummA := 0;
```

```

for k to length(s) do
  if s[k] = "d" then
    cummDM := cummDM - Y*(f1(X + 1, Y)
                        - f1(X, Y))/(kk + 2);

    X := X + 1
  elif s[k] = "g" then
    cummDM := cummDM - Y*(f1(X - 1, Y)
                        - f1(X, Y))/(kk + 2);

    X := X - 1
  elif s[k] = "h" then
    cummDM := cummDM + X*(f2(X, Y + 1)
                        - f2(X, Y))/(kk + 2);

    cummA := cummA + X;
    Y := Y + 1
  elif s[k] = "b" then
    cummDM := cummDM + X*(f2(X, Y - 1)
                        - f2(X, Y))/(kk + 2);

    cummA := cummA - X;
    Y := Y - 1
  else RETURN("mot non conforme")
  end if
end do;

DM := cummDM;
A := cummA;
lprint("MOT", mot);
lprint("DISTANCE MOYENNE A", x0, y0, ":", DM/A);
lprint(A)
end proc

```

### 0.3.2 Calcul de paramètres associés aux polyominos

Le programme Maple suivant prend en entrée un mot codant le périmètre d'un polyomino à partir de l'origine et donne, en sortie, les paramètres suivants : aire, centre de gravité, moment d'inertie et les polynômes de Laurent codant la famille des projections verticales et horizontales.

```

calculer := proc(mot)
local k, s, X, Y, cummA, cummXbar, cummYbar, cummX2, cummY2,
cummProjV, cummProjH, AIRE, CG, MI, qproj, tproj, Xbarre,
Ybarre; global q, t;
    s := convert(mot, string);
    X := 0;
    Y := 0;
    cummA := 0;
    cummXbar := 0;
    cummYbar := 0;
    cummX2 := 0;
    cummY2 := 0;
    MI;
    cummProjV := 0;
    cummProjH := 0;
    for k to length(s) do
        if s[k] = "d" then
            cummYbar := cummYbar - 1/2*Y^2;
            cummY2 := cummY2 - 1/3*Y^3;
            cummProjH := cummProjH - t^Y;
            X := X + 1
        elif s[k] = "g" then
            cummYbar := cummYbar + 1/2*Y^2;
            cummY2 := cummY2 + 1/3*Y^3;

```

```

        cummProjH := cummProjH + t^Y;
        X := X - 1
    elif s[k] = "h" then
        cummA := cummA + X;
        cummXbar := cummXbar + 1/2*X^2;
        cummX2 := cummX2 + 1/3*X^3;
        cummProjV := cummProjV + q^X;
        Y := Y + 1
    elif s[k] = "b" then
        cummA := cummA - X;
        cummXbar := cummXbar - 1/2*X^2;
        cummX2 := cummX2 - 1/3*X^3;
        cummProjV := cummProjV - q^X;
        Y := Y - 1
    else RETURN("mot non conforme")
    end if
end do;
AIRE := cummA;
Xbarre := cummXbar/AIRE; Ybarre := cummYbar/AIRE;
MI := cummX2 + cummY2 - (Xbarre^2 + Ybarre^2)*AIRE;
lprint("MOT", mot); lprint("PERIMETRE", length(s));
lprint("AIRE", cummA); lprint("CENTRE DE GRAVITE");
print([Xbarre, Ybarre],evalf([Xbarre, Ybarre]));
lprint("MOMENT D'INERTIE", MI, evalf(MI));
lprint("PROJECTIONS VERTICALES");
print(series(-cummProjV/(1 - q), q, infinity));
lprint("PROJECTIONS HORIZONTALES");
print(series(-cummProjH/(1 - t), t, infinity))
end proc

```

## APPENDICE B

### 0.1 Preuve

Voici une preuve alternative directe du Lemme 5 du Chapitre 3 qui n'utilise pas le théorème des axes parallèles.

**Preuve.** (du Lemme 5) Considérons le cas où les  $S_k$  sont des ensembles mesurables. Le cas des ensembles finis  $S_k$  est semblable et est donc laissé au lecteur. D'une part, on a

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^N m_k |g_k|^2 - \frac{1}{m} \left| \sum_{k=1}^N m_k g_k \right|^2 \\ = \sum_{k=1}^N m_k \left| \frac{\int \int_{S_k} z \, dx \, dy}{m_k} \right|^2 - \frac{1}{m} \left| \sum_{k=1}^N m_k \frac{\int \int_{S_k} z \, dx \, dy}{m_k} \right|^2 \\ = \sum_{k=1}^N \frac{1}{m_k} \left| \int \int_{S_k} z \, dx \, dy \right|^2 - \frac{1}{m} \left| \int \int_{S_1 \cup \dots \cup S_N} z \, dx \, dy \right|^2. \end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} I(S_1 \cup \dots \cup S_N) - \sum_{k=1}^N I(S_k) \\ = \int \int_{S_1 \cup \dots \cup S_N} |z|^2 \, dx \, dy - \frac{1}{m} \left| \int \int_{S_1 \cup \dots \cup S_N} z \, dx \, dy \right|^2 \\ - \sum_{k=1}^N \left( \int \int_{S_k} |z|^2 \, dx \, dy - \frac{1}{m_k} \left| \int \int_{S_k} z \, dx \, dy \right|^2 \right) \\ = \sum_{k=1}^N \frac{1}{m_k} \left| \int \int_{S_k} z \, dx \, dy \right|^2 - \frac{1}{m} \left| \int \int_{S_1 \cup \dots \cup S_N} z \, dx \, dy \right|^2. \end{aligned}$$

■

## RÉFÉRENCES

- Altshuler, Y., V. Yanovsky, D. Vainsencher, I. A. Wagner, et A. M. Bruckstein. 2006. « On minimal perimeter polyminoes ». In *Discrete geometry for computer imagery*. T. 4245, série *Lecture Notes in Comput. Sci.*, p. 17–28. Berlin. Springer.
- Andres, E. 1994. « Discrete circles, rings and spheres. », *Computer & Graphics*, vol. 18, no. 5, p. 695–706.
- Andres, E. et M.-A. Jacob. 1997. « The discrete analytical hyperspheres. », *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*, vol. 3, no. 1, p. 75–86.
- Barcucci, E., A. Del Lungo, M. Nivat, et R. Pinzani. 1996. « Reconstructing convex polyominoes from horizontal and vertical projections », *Theoret. Comput. Sci.*, vol. 155, no. 2, p. 321–347.
- Beauquier, D. 1991. « An undecidable problem about rational sets and contour words of polyominoes », *Inform. Process. Lett.*, vol. 37, no. 5, p. 257–263.
- Beauquier, D. et M. Nivat. 1991. « On translating one polyomino to tile the plane », *Discrete Comput. Geom.*, vol. 6, no. 6, p. 575–592.
- Bender, E. A. 1974. « Convex  $n$ -ominoes », *Discrete Math.*, vol. 8, p. 219–226.
- Braquelaire, J. P. et A. Vialard. 1999. « Euclidean paths : A new representation of boundary of discrete regions », *Graph. models image proc.*, vol. 61, no. 1, p. 16–43.
- Brlek, S., J.-M. Fedou, et X. Provençal. 2008. « On the tiling by translation problem », *Discrete Applied Maths*. Accepté.
- Brlek, S., G. Labelle, et A. Lacasse. 2003. « Incremental algorithms based on discrete Green theorem ». In *Discrete geometry for computer imagery*. T. 2886, série *Lecture Notes in Comput. Sci.*, p. 277–287, Berlin. Springer.
- — —. 2005a. « Algorithms for polyominoes based on the discrete Green theorem », *Discrete. Appl. Math.*, vol. 147, no. 2-3, p. 187–205.
- — —. 2005b. « The discrete Green theorem and some applications in discrete geometry », *Theoret. Comput. Sci.*, vol. 346, no. 2, p. 200–225.
- — —. 2005c. « A note on a result of Daurat and Nivat ». In *Developments in Language Theory*. T. 3572, série *Lecture Notes in Comput. Sci.*, p. 189–198, Berlin. Springer.

- ——. 2006a. « Properties of contour path of discrete sets », *I. J. of Found. of Comput. Sci.*, vol. 17, no. 3, p. 543–556.
- ——. 2006b. « Shuffle operations on lattice paths ». In *International Conference on Combinatorics, Automata and Number Theory*. T. Prépublication 06.002, série *Lecture Notes in Comput. Sci.*, Liège.
- ——. 2008a. « Discrete sets with minimal moment of inertia », *Theoret. Comput. Sci.* *Accepté*.
- ——. 2008b. « On minimal of inertia polyominoes ». In *Discrete geometry for computer imagery*. Coll. « *Lecture Notes in Comput. Sci.* », Berlin. Springer.
- ——. 2008c. « Shuffle operations on discrete paths », *Theoret. Comput. Sci.*, vol. 391, no. 1-2, p. 75–89.
- Buzer, L. 2002. « An incremental linear time algorithm for digital line and plane recognition using a linear incremental feasibility problem ». In *Discrete geometry for computer imagery*. T. 2301, série *Lecture Notes in Comput. Sci.*, p. 372–381, Berlin. Springer.
- ——. 2003. « A linear incremental algorithm for naive and standard digital lines and planes recognition », *Graphical Models*, vol. 65, p. 61–76.
- Clarke, A. L. 1980. « Isoperimetrical polyominoes », *J. Recreational Math.*, vol. 13, no. 1, p. 18–25.
- Comtet, L. 1974. *Advanced combinatorics*. Dordrecht : D. Reidel Publishing Co., enlarged édition. The art of finite and infinite expansions.
- Conway, J. H. et J. C. Lagarias. 1990. « Tilings with polyominoes and combinatorial group theory », *J. Combin. Theory Ser. A*, vol. 53, no. 2, p. 183–208.
- Daurat, A. et M. Nivat. 2003. « Salient and reentrant points of discrete sets ». In *9th International Workshop on Combinatorial Image Analysis*. T. 12, série *Electron. Notes Discrete Math.*, p. 12 pp. (electronic), Amsterdam. Elsevier.
- Del Lungo, A. 1994. « Polyominoes defined by two vectors », *Theoret. Comput. Sci.*, vol. 127, no. 1, p. 187–198.
- Del Lungo, A., M. Nivat, R. Pinzani, et L. Sorri. 1998. « The medians of discrete sets », *Inform. Process. Lett.*, vol. 65, no. 6, p. 293–299.
- Delest, M.-P., D. Gouyou-Beauchamps, et B. Vauquelin. 1987. « Enumeration of parallelogram polyominoes with given bond and site perimeter », *Graphs Combin.*, vol. 3, no. 4, p. 325–339.
- Feynman, R. P., R. B. Leighton, et M. Sands. 1963. *The Feynman lectures on physics. Vol. 1 : Mainly mechanics, radiation, and heat*. Addison-Wesley Publishing Co., Inc., Reading, Mass.-London.
- Fiorio, C., D. Jamet, et J.-L. Toutant. 2006. « Discrete circles : an arithmetical approach with



- non-constant thickness ». In *SPIE Electronic Imaging*. T. 6066, série *Vision Geometry XIV*.
- Fiorio, C. et J.-L. Toutant. 2006. « Arithmetic discrete hyperspheres and separatingness ». In *Discrete geometry for computer imagery*. T. 4245, série *Lecture Notes in Comput. Sci.*, p. 425–436, Berlin. Springer.
- Freeman, H. 1970. « Boundary encoding and processing », *Picture Processing and Psychopictorics*, p. 241–266.
- Gardner, M. 1957. « Mathematical games », *Scientific American*, no. 196, p. 126–134.
- . 1967. « Mathematical magic show », *Scientific American*.
- Goldberg, S. I. 1998. *Curvature and homology*. Mineola, NY : Dover Publications Inc. Revised reprint of the 1970 edition.
- Golomb, S. W. 1954. « Checker boards and polyominoes », *Amer. Math. Monthly*, vol. 61, p. 675–682.
- Golomb, S. W. 1989. « Polyominoes which tile rectangles », *J. Combin. Theory Ser. A*, vol. 51, no. 1, p. 117–124.
- . 1994. *Polyominoes*. Princeton, NJ : Princeton University Press, second édition. Puzzles, patterns, problems, and packings, With diagrams by Warren Lushbaugh, With an appendix by Andy Liu.
- Grünbaum, B. et G. C. Shephard. 1987. « Tilings and patterns », *Bull. Amer. Math. Soc (N.S)*, vol. 17, no. 2, p. 369–372.
- . 1989. *Tilings and patterns*. Coll. « A Series of Books in the Mathematical Sciences ». New York : W. H. Freeman and Company. An introduction.
- Kim, C. 1981. « On the cellular convexity of complexes », *Pattern Analysis and Machine Intelligence*, vol. 3, no. 6, p. 617–625.
- . 1982. « Digital convexity, straightness, and convex polygons », *Pattern Analysis and Machine Intelligence*, vol. 4, no. 6, p. 618–626.
- Klarner, D. A. et R. L. Rivest. 1973. « A procedure for improving the upper bound for the number of  $n$ -ominoes », *Canad. J. Math.*, vol. 25, p. 585–602.
- Klette, R. et A. Rosenfeld. 2004. « Digital straightness—a review », *Discrete Appl. Math.*, vol. 139, no. 1-3, p. 197–230.
- Lothaire, M. 1997. *Combinatorics on words*. Coll. « Cambridge Mathematical Library ». Cambridge : Cambridge University Press.
- . 2002. *Algebraic combinatorics on words*. T. 90, série *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*. Cambridge : Cambridge University Press.

- ——. 2005. *Applied combinatorics on words*. T. 105, série *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*. Cambridge : Cambridge University Press.
- Lyndon, R. C. 1954. « On Burnside's problem », *Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 77, p. 202–215.
- ——. 1955. « On Burnside's problem. II », *Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 78, p. 329–332.
- Maloň, S. et H. Freeman. 1961. « On the encoding of arbitrary geometric configurations », *IRE Trans.*, vol. EC-10, p. 260–268.
- Mansfield, E. L. et P. E. Hydon. 2007. « Difference forms », *Found. Comp. Math.* <http://personal.maths.surrey.ac.uk/st/P.Hydon/>.
- Maplesoft. 2007. *MAPLE 11 User Manual*. a division of Waterloo Maple Inc.
- McCallum, W. G., D. Hughes-Hallet, et A. M. Gleason. 1999. *Multivariable calculus*. Cambridge.
- Minsky, M. et S. Papert. 1969. *Perceptrons : An Introduction to Computational Geometry*. Cambridge, Mass. : MIT Press.
- Philips, W. 1993. « A new fast algorithm for moment computation », vol. 26, no. 17, p. 1619–1621.
- Read, R. C. 1962. « Contributions to the cell growth problem », *Canad. J. Math.*, vol. 14, p. 1–20.
- Reveillès, J.-P. 1991. « Géométrie discrète, calcul en nombres entiers et algorithmique ». Thèse de Doctorat, Université Louis Pasteur, Strasbourg.
- Robinson, R. M. 1971. « Undecidability and nonperiodicity for tilings of the plane », *Invent. Math.*, vol. 12, p. 177–209.
- Rosenfeld, A. 1974. « Digital straight line segments », *IEEE Trans. Computers*, vol. C-23, no. 12, p. 1264–1269.
- Spivak, M. 1965. *Calculus on manifolds. A modern approach to classical theorems of advanced calculus*. W. A. Benjamin, Inc., New York-Amsterdam.
- Stanley, R. P. 1997. *Enumerative combinatorics. Vol. 1*. T. 49, série *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge : Cambridge University Press. With a foreword by Gian-Carlo Rota, Corrected reprint of the 1986 original.
- Tang, G. Y. et B. Lien. 1988. « Region filing with the use of the discrete Green theorem », vol. 42, no. 3, p. 297–305.
- Temperley, H. N. V. 1956. « Combinatorial problems suggested by the statistical mechanics of domains and of rubber-like molecules », *Phys. Rev. (2)*, vol. 103, p. 1–16.
- Viennot, X. 1992. « A survey of polyominoes enumeration ». In *3rd Formal Power Series and Algebraic Combinatorics*. T. 11, p. 399–420, Montréal. LaCIM.

- Yang, L. et F. Albrechtsen. 1994. «Fast computation of invariant geometric moments : A new method giving correct results ». In *International Conference on Pattern Recognition*, p. A :201–204.
- — —. 1996. «Fast and exact computation of cartesian geometric moments using discrete Green's theorem », *Pattern recogn.*, vol. 29, no. 7, p. 1061–1074.